MECÁNICA ESTADÍSTICA **Curso 2019**

Trabajo práctico N° 0

Espacio de estados y operadores - 06/03/19

Problema 1. Dados dos operadores lineales $\hat{A}$, $\hat{B}$ y sus correspondientes adjuntos $\hat{A}^\dagger$, $\hat{B}^\dagger$ demostrar que $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$.

Problema 2. Dado el operador $\hat{A}$ y su adjunto $\hat{A}^\dagger$, demostrar que los elementos de matriz entre estados arbitrarios φ y ψ satisfacen:

$$\langle\varphi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}^\dagger|\varphi\rangle^*$$

Problema 3. Dos estados arbitrarios φ y ψ definen un operador $|\psi\rangle\langle\varphi|$. Demostrar que este operador cumple con:

$$|\psi\rangle\langle\varphi|^\dagger = |\varphi\rangle\langle\psi|$$

Problema 4. Proyectores: dado un estado ψ y su vector normalizado ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$), se define el operador proyector en la dirección de ψ por medio de:

$$\hat{P}_\psi \equiv |\psi\rangle\langle\psi| \quad .$$

Este operador satisface $\hat{P}_\psi = \hat{P}_\psi^2$.
Sean los vectores $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, ..., |\psi_q\rangle\}$ q vectores ortonormales en un espacio de dimensión N ($q \leq N$). Mostrar que el operador $\hat{P}_q \equiv \sum_{i=1}^{N} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ cumple con:

a) $\hat{P}_q = \hat{P}_q^2$.

b) El operador $\hat{P}_q$ proyecta un vector cualquiera dentro del subespacio generado por los $|\psi_i\rangle$.

Problema 5. Un operador U se llama unitario si $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{I}$ (es decir $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$). Dada un base de estados $\{|\psi_i\rangle\}$ que sean ortonormales (es decir $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$) se define un nuevo conjunto de estados $\{|\psi_i'\rangle\}$ por medio de:

$$|\psi_i'\rangle = U|\psi_i\rangle,$$

y un nuevo conjunto de operadores dados por la transformación:

$$\hat{A}' = \hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U} \quad .$$

a) Mostrar que el producto escalar se conserva es decir $\langle\alpha'|\beta'\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle$ y que el álgebra de operadores es invariante, es decir $(\hat{A}\hat{B})' = \hat{A}'\hat{B}'$.

b) Mostrar que el nuevo conjunto de estados es una base ortonormal.

c) Mostrar que $\hat{A}$ y $\hat{A}'$ tienen los mismos autovalores.

Problema 6. Un operador $\hat{A}$ se llama hermítico si $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$. En el caso de un espacio de dimensión finita, siempre existe una base ortonormal $\{|\psi_i\rangle\}$ en que la matriz asociada al operador $\hat{A}$ es diagonal. Esto es:

$$\langle\psi_i|\hat{A}|\psi_j\rangle = a_j\delta_{ij} \quad .$$

a) Mostrar que en esa base a_i y $|\psi_i\rangle$ son autovectores y autovalores correspondientes.

b) Mostrar que todos los autovalores a_i son reales.

c) Mostrar que los autovectores $|\psi_i\rangle$ y $|\psi_j\rangle$ correspondientes a distintos autovalores ($a_i \neq a_j$) son ortonormales.

Problema 7. Siendo $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$, decimos que conmutan si $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. Dados dos operadores hermíticos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ asociados a dos observables, es decir que existe una base de estados asociadas a cada operador en dónde éste es diagonal, si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ conmutan demostrar que:

a) Siendo $|\psi\rangle$ autoestado de $\hat{A}$, entonces $\hat{B}|\psi\rangle$ también es autoestado de $\hat{A}$.

b) Si $|\psi_i\rangle$ y $|\psi_j\rangle$ son autoestados de $\hat{A}$ con autovalores distintos, entonces

$$\langle\psi_i|\hat{B}|\psi_j\rangle = 0 \quad .$$

c) Se puede construir una base ortonormal del espacio de estados con autovectores comunes de $\hat{A}$ y de $\hat{B}$.

Problema 8. Los operadores hermíticos cuyos elementos diagonales son positivos en cualquier base ($\langle\psi_i|\hat{A}|\psi_i\rangle > 0$) se denominan operadores definidos positivos. Si $\hat{A}$ es un observable, probar que:

a) si todos los autovalores de $\hat{A}$ son positivos, entonces $\hat{A}$ es definido positivo.

b) $\hat{A}^2$ es no negativo, es decir $\langle\psi_i|\hat{A}^2|\psi_i\rangle \geq 0$ en cualquier base.

Problema 9. Sea $\{|\psi_i\rangle\}$ una base ortonormal del espacio de estados. Se define la traza de un operador

$$Tr(\hat{A}) = \sum_i \langle\psi_i|\hat{A}|\psi_i\rangle$$

Mostrar que la traza cumple las siguientes propiedades

a) No depende de la base elegida.

b) $Tr(|\psi\rangle\langle\varphi|) = \langle\varphi|\psi\rangle$.

c) La traza de un proyector es igual a la dimensión del espacio en que proyecta $Tr(\hat{P}_q) = q$.

d) Es invariante frente a una permutación cíclica de operadores, esto es $Tr(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = Tr(\hat{C}\hat{A}\hat{B})$.

Problema 10. Sea $f(x)$ una función continua e infinitamente diferenciable y $\hat{A}$ un operador. El operador $f(\hat{A})$ se define por la expansión en serie de $f(x)$

$$f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!} f^n(x)\ |_{x=0}$$

a) Mostrar que si $|\psi_i\rangle$ es autovector de $\hat{A}$ con autovalor a_i, entonces también es autovector de $f(\hat{A})$ con autovalor $f(a_i)$.

b) Con $\hat{A}$ hermítico, mostrar que $e^{\hat{A}}$ es un operador definido positivo y que $e^{i\hat{A}}$ es un operador unitario.