MECÁNICA ESTADÍSTICA **Curso 2019**

Trabajo práctico N° 8

Gas de Fermi - 21/06/19

Estudiaremos en esta guía sistemas de partículas indistinguibles, no interactuantes, de spin semientero. Los mismos son descriptos por la distribución de Fermi que estudiamos en una práctica anterior. Viene dada por:

$$< n_s >= f(\varepsilon_s) \equiv \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_s - \mu)] + 1}.$$

Nuevamente, n_s es el número de ocupación de un estado con números cuánticos s; μ y β fijan el valor medio del número de partículas $< N >= \sum_s n_s$ y el valor medio de la energía $< E >$ respectivamente. La función $f(\varepsilon)$ es la distribución de Fermi. Cuando la distancia entre números s se hace muy pequeña (como sucede con los impulsos para un gas encerrado en un volumen V macroscópico) podemos escribir las sumatorias anteriores como integrales:

$$< N > \approx \int \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_s - \mu)] + 1} g(s) ds = \int f(\varepsilon_s) g(s) ds$$

La cantidad $g(s)$ es la *densidad de estados*, que en la teoría notamos como $D(s)$.

Modelo de Sommerfeld Uno de los primeros tratamientos aplicados a un metal (Drude, 1900) consistió en describirlo como un gas ideal clásico de electrones. Obviamente —entre otros problemas— la constancia del calor específico con la temperatura ($C_V = 3/2Nk$) predicha por este modelo no se cumplía ni aún a alta temperatura. Sommerfeld fue el primero en aplicar por primera vez el principio de Pauli (utilizado hasta entonces en sistemas atómicos) a los metales. En esta práctica, veremos algunos de los éxitos de esta teoría.

Problema 1. Un metal puede pensarse como un sólido en el que algunos electrones tienen la capacidad de desplazarse a lo largo de todo el volumen V del material. Para un metal alcalino como el Na (con una densidad de 0.97 g/cm^3) es razonable suponer que cada átomo de los N que componen el cristal dona uno de estos electrones.

a) Describiremos los grados de libertad electrónicos del metal como un gas ideal de partículas indistinguibles con spin 1/2. Calcule la energía ε_F y la temperatura de Fermi θ_F para el Na. Explique por qué estos valores implican que no es correcto describir clásicamente a este metal a ninguna temperatura razonable. ¿Espera que el valor de la velocidad de fermi v_F sea mayor o menor que en el caso clásico? Compare v_F con la velocidad de la luz en el vacío.

b) Calcular la energía cinética media y la presión a $T = 0$ (recordar el Problema 3 de la Práctica 7). ¿Qué sucede con estas cantidades (crecen o decrecen) si consideraramos partículas de masa mayor? Comparar estos valores de $\langle E \rangle$ y P con las de un gas clásico a temperatura T.

c) Encontrar la dependencia de la entropía del gas de electrones con la temperatura cuando $\lambda/v >> 1$. Mostrar que a temperaturas lo suficientemente bajas (y de acuerdo con los experimentos en metales simples) el calor específico $C_V \approx \pi^2/2Nk\frac{T}{\theta_F}$. *Ayuda:* Puede resultar conveniente recurrir al desarrollo de la distribución de Fermi válido a baja temperatura (debido a Sommerfeld, 1927), $f(\varepsilon) = \theta(\mu - \varepsilon) - \frac{\pi^2}{6}(kT)^2\delta'(\varepsilon - \mu) + ...$ No olvidar, al desarrolar a orden más bajo en kT/ε_F, que μ también es una función de la temperatura.

En ciertos materiales metálicos, llamados *fermiones pesados*, los portadores de carga son *cuasipartículas* análogas a los electrones, pero con una masa efectiva que puede llegar a ser cientos de veces mayor. Sin embargo, el calor específico a baja temperatura sigue cumpliendo esa relación lineal con la temperatura. ¿Cómo se reflejará esa masa gigantesca en una medida de C_V?

Problema 2. *Paramagnetismo de Pauli.* Considerar el efecto de un campo magnético externo **H** (con dirección paralela al eje z) sobre los spines electrónicos en un gas de electrones libres no relativista. Tomaremos $\hat{\mathcal{H}} = p^2/(2m) - \mu_B\, \sigma \cdot \mathbf{H}$, donde $\mu_B = e\hbar/(2m_e)$ es el magnetón de Bohr y σ son las matrices de spin de Pauli.

a) Compare los órdenes de magnitud de ε_F y $\mu_B H$ para el caso de un metal simple y campos magnéticos convencionales. Haga un esquema mostrando la densidad de estados electrónicos con spin + y con spin - en función de la energía para $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ y para $\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$; realice el mismo gráfico para los números de ocupación $< n_+(\varepsilon) >$ y $< n_-(\varepsilon) >$ cuando la degeneración es completa ($T = 0\,K$). ¿Cómo podemos obtener la proyección de la magnetización en la dirección z (M_z) a partir de estas cantidades? *Ayuda.* Recordemos algunas definiciones: $g_+(\varepsilon)d\varepsilon$ será el número de estados cuánticos electrónicos en los que la proyección de spin es hacia arriba y la energía se encuentra entre ε y $\varepsilon + d\varepsilon$; $< n_+(\varepsilon) >$ nos dice cuántos de estos estados cuánticos estarán (en promedio) realmente ocupados. Se definen magnitudes análogas para el caso de proyección de spin hacia abajo. La magnetización M_z será la suma de las proyecciones según el eje z de los momentos magnéticos.

b) Hallar la susceptibilidad paramagnética inicial ($\chi \equiv \frac{1}{V}\frac{dM_z}{dH}$) por unidad de volumen a $T = 0\,K$.

c) Muestre que en general la susceptibilidad paramagnética inicial a una temperatura arbitraria está dada por:

$$\chi = 2\mu_B^2 \int_0^\infty g'(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon$$

donde $g(\varepsilon)$ es la densidad de estados excluida la degeneración de spin y $f(\varepsilon)$ la distribución (o factor de ocupación) de Fermi. Utilizando esta expresión general muestre que en el caso de degeneración alta,

$$\chi(T) = \frac{3\mu_B^2 N}{2V\varepsilon_F}\{1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2 + ...\}.$$

Compare este resultado con el obtenido anteriormente para momentos magnéticos no ambulantes.

Enanas Blancas. Las enanas blancas son estrellas que han agotado casi todo el contenido de hidrógeno que se transforma en energía y en He en las reacciones termonucleares. Pese a ello, son estrellas blancas (es decir, muy calientes, $T \approx 10^7 K$) que, dado que el proceso de conversión de H en He no puede seguir, irradian poca energía a expensas de su energía potencial gravitatoria. Un modelo simplificado consiste en considerar a estas estrellas como un mar de Fermi de N electrones no interactuantes, que se mueven bajo un fondo de carga positiva conformado por los núcleos de He (en cantidad suficiente como para balancear la carga total), y sin considerar la energía radiada. Tomamos la masa electrónica como $m \approx 9{,}1 \times 10^{-31} kg$, la de los protones y neutrones como $m_p \approx 1{,}67 \times 10^{-27} kg$, $G \approx 6{,}7 \times 10^{-11} m^3/kgs^2$, $\hbar \approx 1. \times 10^{-34} Js$.

Problema 3. Nuestro modelo de orden cero supondrá que la densidad de He^4 es *uniforme* en un volumen V esférico. Tomamos como densidad de masa típica $\rho \approx 10^7 g/cm^3$ (es decir $\approx 10^7$ veces la densidad del sol —o la del agua).

a) Suponiendo electrones no relativistas, calcule el módulo del impulso p_F, la energía ε_F y la temperatura de fermi θ_F del sistema electrónico. En base a ese resultado, explique por qué en primera aproximación podemos estudiar la estrella como si estuviera T = 0 K, pese a que su temperatura real es de millones de K. Compare ε_F con la energía típica de ionización de un átomo; ¿se justifica el haber despreciado las interacciones coulombianas ("química") entre los electrones y los núcleos de He? Compare

ε_F con la energía en reposo de los electrones, mc^2: ¿se justifica utilizar una teoría no relativista? Estime el cociente entre las presión debida a los electrones y la presión asociada a los núcleos de He.

La presión causada por el movimiento de punto cero de los electrones es balanceada por la gravedad de la propia estrella. El hecho de que los electrones sean relativistas hace que su energía cinética (y con ello la presión) cambie más lentamente con V que lo calculado en el problema anterior (modelo de Sommerfeld). Debido a ello, existe un límite superior M_0 en la masa de la estrella. Superado este límite, la fuerza gravitatoria supera la presión fermiónica, y la estrella colapsa hacia una *estrella de neutrones* (o hacia objetos aún más extraños). Estudiaremos ese límite en los items que siguen.

b) Suponiendo electrones ultra relativistas, calcule la energía cinética de los N electrones a $T = 0$, y la presión asociada a su movimiento. *Ayuda: desarrolle la energía* $\varepsilon = ((mc^2)^2 + (cp)^2)^{1/2}$ *a primer orden en* $\frac{mc}{p}$.

c) Suponiendo gravedad Newtoniana, estime la energía gravitacional de la esfera de He^4:

$$E_G = -\frac{1}{2}G \int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{\mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid} d\mathbf{r} d\mathbf{r}'$$

en función de la masa M y el volumen V. *Ayuda: la masa total es esencialmente la asociada a los núcleos de He, con* $m_{He} \approx 4m_p$ *y* $N_{He} = N/2$*; el cálculo de esta energía es totalmente análogo a otros que ha realizado para el caso de energía electrostática de una esfera cargada uniformemente; su resultado es* $E_G = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$, donde R es el radio de la esfera.

ch) Encontraremos la condición de equilibrio de la estrella minimizando la energía total (cinética electrónica + gravitatoria) a $T = 0K$. Note que el volumen de equilibrio de la estrella *decrece* cuando la masa M aumenta. Muestre que si $M > M_0$ no se puede alcanzar el equilibrio. Calcule M_0 (la *masa de Chandrasekhar*), y compárela con la masa del sol ($\approx 2 \times 10^{30} kg$). Cálculos más refinados dan una masa límite de ≈ 1.4 masas solares.