Mecánica Analítica. Trabajo Práctico 7

Transformaciones canónicas - Ecuación de Hamilton-Jacobi

Año 2017.

Problema 1:

Sean $\mathbf{q} = \{q_i\}$ y las coordenadas generalizadas de un sistema mecánico, y $\mathbf{p} = \{p_i\}$ sus momentos conjugados. Considere una transformación canónica de $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ a $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ donde $\mathbf{Q} = \{Q_i\}$ y $\mathbf{P} = \{P_i\}$ con $Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ y $P_i = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$.

a) Suponga que la transformación está generada por una función $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$. Muestre que en ese caso deben cumplirse:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \text{ y } \qquad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t},$$

donde H' es el nuevo Hamiltoniano.

b) Suponga ahora que la transformación está generada por una función $F = F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) - \sum_i Q_i\, P_i$. Muestre que entonces se verifican:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \text{ y } \qquad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

c) Encuentre las ecuaciones correspondientes para las transformaciones generadas por funciones de la forma $F = F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) + \sum_i q_i\, p_i$ y $F = F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) + \sum_i (q_i\, p_i - Q_i\, P_i)$.

Problema 2:

¿Para qué valores de los parámetros α y β las siguientes ecuaciones representan una transformación canónica?

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}^\alpha \cos(\beta \mathbf{p}) \qquad \mathbf{P} = \mathbf{q}^\alpha \sin(\beta \mathbf{p})$$

a) Resuelva usando corchetes de Poisson.

b) Resuelva determinando la función generatriz correspondiente $F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q})$.

Problema 3:

a) Dado un sistema mecánico con s grados de libertad, muestre que una transformación puntual de coordenadas en el formalismo Lagrangiano, definida por $Q_i = f_i(\mathbf{q}, t)$, $i = 1, \ldots, s$ (con jacobiano no nulo) es equivalente a una transformación canónica generada por una función $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{i=1}^{s} f_i(\mathbf{q}, t)\, P_i$. Para ello, muestre que el Hamiltoniano H' para el sistema en las nuevas variables $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ verifica

$$H' \;=\; \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - L \;=\; H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \;,$$

donde $H = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L$, siendo L el Lagrangiano del sistema, expresado en cada caso en las variables adecuadas.

Problema 4:

Muestre que las siguientes ecuaciones representan una transformación canónica:

$$Q = -p \qquad P = q + A\, p^2 \;\; (A = \mathrm{cte}) \;,$$

a) evaluando $[P, Q]_{q,p}$

b) expresando $p\, dq - P\, dQ$ como un diferencial exacto $dF(q, Q)$. Encuentre además la función generatriz $F_1(q, Q, t)$ correspondiente.

c) Encuentre la función generatriz de $F_2(q, P, t)$ para esta transformación.

Problema 5:

Pruebe, evaluando los corchetes de Poisson, que la siguiente transformación es canónica:

$$Q_1 = q_1 \qquad P_1 = p_1 - 2p_2$$
$$Q_2 = p_2 \qquad P_2 = -2q_1 - q_2$$

a) Encuentre, una función generatriz para esta transformación.

Problema 6:

Muestre que la transformación

$$Q = p + iaq \qquad P = \frac{p - iaq}{2ia}$$

es canónica. Encuentre una función generatriz para esta transformación. Utilícela para resolver el problema del oscilador armónico lineal.

Problema 7:

El movimiento de una partícula de masa m y aceleración constante a en una dimensión está descripto por:

$$x = x_0 + \frac{p_0}{m}\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2 \;, \qquad p = p_0 + m\, a\, t \;.$$

Muestre que la transformación de las variables (x, p) a las (x_0, p_0) es canónica.

a) Utilice corchetes de Poisson.

b) Utilice una función generatriz $F_1(x, x_0, t)$.

Problema 8:

Considere un oscilador armónico lineal. Suponga que inicialmente el oscilador ha sido apartado del equilibrio una distancia a y tiene velocidad nula.

a) Escriba el Lagrangiano y, a partir de éste, el Hamiltoniano

b) Utilice el método de Hamilton Jacobi para obtener la posición en función del tiempo. ¿Cuánto vale el nuevo Hamiltoniano en este método? ¿Por qué?

c) ¿Cuál es el significado físico de las constantes obtenidas? ¿Cómo puede determinarlas?

d) Una vez resuelto el problema mecánico, pruebe que la función principal $S(q, \alpha, t)$ verifica $S = \int L\, dt + \text{cte}$, donde $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ es el Lagrangiano del sistema. ¿Cómo puede entonces interpretar la función principal S? ¿Qué condiciones deben cumplirse para que se verifique lo anterior?

Problema 9:

Considere un partícula libre en un marco inercial. Inicialmente, la partícula se encuentra en la posición $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene velocidad $\vec{v}_0 = (0, v_{y,0}, v_{z,0})$.

a) Escriba cómo cambia la posición en función del tiempo

b) Escriba el Lagrangiano del sistema y obtenga las ecuaciones de movimiento

c) A partir del Lagrangiano obtenido en (b), escriba el Hamiltoniano

d) Utilizando la ecuación de Hamilton-Jacobi y el método de separación de variables, vuelva a obtener la posición en función del tiempo para la partícula libre. Discuta el significado físico de las constantes obtenidas. ¿Cómo cambian estas constantes si ahora la velocidad inicial es $(v_0, 0, 0)$?

e) ¿Cómo cambian los puntos anteriores si la partícula se encuentra ahora en caida libre? ¿Y si fuera un tiro vertical?

Problema 10:

Considere una partícula de masa m en una dimensión (x) bajo la acción de un potencial dependiente del tiempo $V = -mAxt$, donde A es una constante

a) Escriba el Lagrangiano de la partícula.

b) Obtenga las ecuaciones de movimiento a partir del Lagrangiano. Encuentre $x(t)$ si la posición inicial a $t = 0$ es x_0 y la velocidad v_0.

c) A partir de el Lagrangiano obtenido en (a), calcule el Hamiltoniano

d) Calcule las ecuaciones de Hamilton.

e) Con el Hamiltoniano calculado en (c), utilice el método de Hamilton Jacobi para volver a obtener $x(t)$. Para ello, siga los siguientes pasos:

(i) Considere la función generatriz $S(q, P, t)$ (función principal de Hamilton). En este método ¿qué característica tienen las nuevas variables canónicas Q y P (también llamadas a veces β y α)? ¿Cuánto vale el nuevo Hamiltoniano?

(ii) Reescriba H utilizando las derivadas parciales de S correspondientes y escriba la ecuación de Hamilton Jacobi. Observe que no es posible encontrar S mediante separación de variables.

(iii) Para resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi, proponga la solución $S = f(t)x + g(t)$. Agrupando términos en potencias de x, obtenga $f(t)$ y $g(t)$.

(iv) Identifique una de las constantes de integración adecuada de las funciones $f(t)$ y $g(t)$, por ejemplo f_0, con el nuevo momento P. A partir de esto, utilizando S como suele hacer en el método de Hamilton Jacobi obtenga $x(t)$.

(v) Escriba f_0 y su variable conjugada en función de los datos del problema. Observe qué unidades tiene cada una.

(vi) ¿Es S la acción en este caso? ¿Por qué? Compare con la definición de la acción en función del Lagrangiano, $\int L\mathrm{d}t$