Mecánica Analítica. Trabajo Práctico 6

Formulación Hamiltoniana de la mecánica.

Año 2017.

Problema 1:

Un sistema con un grado de libertad tiene el siguiente Hamiltoniano:

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + A(q)p + B(q)$$

donde $A(q)$ y $B(q)$ son ciertas funciones de la coordenada q, y p es el momento conjugado de q.

a) Encuentre la velocidad generalizada $\dot{q}$.

b) Encuentre el Lagrangiano $L(q,\dot{q})$.

Problema 2:

Una partícula de masa m se mueve en un campo de fuerzas centrales con potencial $V(r)$. El lagrangiano en coordenadas esféricas es:

$$L(r,\theta,\phi,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\phi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) - V(r).$$

a) Encuentre el momento $\mathbf{p} = (p_r, p_\theta, p_\phi)$ conjugado a $\mathbf{q} = (r,\theta,\phi)$.

b) Encuentre el Hamiltoniano $H(\mathbf{p},\mathbf{q})$.

c) Escriba explícitamente las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

Problema 3:

Considere el siguiente Lagrangiano $L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$

$$L = a\dot{x}^2 + b\dot{y}^2 + cy^2\dot{x}\dot{z} - k\sqrt{x^2+y^2}$$

donde a,b,c,k son constantes.

a) Obtenga los momentos conjugados

b) Calcule el Hamiltoniano del sistema en función de dichos momentos y de las variables

c) Obtenga las ecuaciones de Hamilton

d) Indique, si las hay, qué cantidades se conservan.

Problema 4:

Si $L = T - V$, donde V es sólo función del vector de coordenadas generalizadas q, en notación matricial es posible escribir

$$L \;=\; L_0(q,t) + \dot{q}^T a(q,t) + \frac{1}{2}\,\dot{q}^T M(q,t)\dot{q} \;,$$

donde $\dot{q}$ y a son vectores columna y M es una matriz cuadrada. Pruebe que el Hamiltoniano del sistema viene dado por

$$H \;=\; \frac{1}{2}\,(p-a)^T M^{-1}(p-a) - L_0$$

donde p es un vector columna cuyos elementos p_i son los momentos conjugados de las coordenadas q_i.

Problema 5:

Utilizando la definición del corchete de Poisson, deduzca las siguientes propiedades:

a) $[u+v,w] = [u,w] + [v,w]$,

b) $[cu,v] = c[u,v]$,

c) $[u,v] = -[v,u]$,

d) $[u,vw] = [u,v]w + v[u,w]$,

donde u, v y w son funciones de q, p y t, y c es una constante.

Problema 6:

Demuestre la identidad de Jacobi:

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$$

Problema 7:

La ecuación de movimiento de una partícula de masa m y carga e que se mueve en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = (0,0,B)$, puede obtenerse del siguiente Lagrangiano:

$$L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{eB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

a) Encuentre el momento $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ conjugado a $\mathbf{r} = (x,y,z)$.

b) Encuentre el Hamiltoniano $H(x,y,z,p_x,p_y,p_z)$.

c) Evalúe los corchetes de Poisson $[m\dot{x}, m\dot{y}]$, $[m\dot{y}, m\dot{z}]$, $[m\dot{z}, m\dot{x}]$ y $[m\dot{x}, H]$.

Problema 8:

Considere el movimiento de una partícula de masa m que se mueve en el plano xy en un potencial isotrópico $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$. El Hamiltoniano correspondiente es

$$H = S_0 = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right) \;.$$

Definiendo

$$S_1 = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 - p_y^2\right) + \frac{1}{2}k\left(x^2 - y^2\right) \ , \quad S_2 = \frac{1}{m}\left(p_x p_y\right) + kxy \ , \quad S_3 = \omega\left(x p_y - y p_x\right) \ ,$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$, muestre que:

a) $[S_0, S_i] = 0 \ , \ i = 1, 2, 3$

b) $[S_i, S_j] = 2\omega \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} S_k \ , \ i, j = 1, 2, 3$

c) $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$

Problema 9:

Demuestre el teorema de Poisson: si f y g son integrales de movimiento, el corchete de Poisson $[f, g]$ también es integral de movimiento.