Mecánica Analítica. Trabajo Práctico 5

Cuerpo rígido.

Año 2017.

Problema 1: Pruebe que para un sistema de ejes coordenados arbitrario los momentos principales de inercia son los autovalores del tensor de inercia.

Problema 2: Una molécula posee la forma de un triángulo isósceles rígido. En un dado sistema coordenado, las posiciones de los átomos son:
$P_1 = (2a, -a, 0)$
$P_2 = (-2a, -a, 0)$
$P_3 = (0, 2a, 0)$
Suponiendo que los átomos tienen igual masa, halle el tensor de inercia respecto del origen de coordenadas, los momentos principales de inercia y los ejes principales de inercia.

Problema 3:

Calcule el tensor de inercia respecto del centro de masas de los siguientes objetos, situando el origen en su centro de masas:

- Esfera maciza de radio R
- Cilindro homogéneo de radio R y altura L
- Anillo homogéneo de radio interior r y radio exterior R

Problema 4: Calcule el tensor de inercia respecto del centro de masas de una pesa que consiste en dos esferas macizas de masas M_1 y M_2 y radios a y b. Ambas esferas están unidas por una barra de masa despreciable y de longitud R (ver Figura 1). Elija los ejes coordenados como crea conveniente. ¿Cómo cambia el tensor de inercia si la esfera de masa M_2 tiene una densidad volumétrica de masa $\rho = s \cdot r^2$?

Problema 5:

a) Calcule las componentes del tensor de inercia de un cubo homogéneo de densidad ρ, masa M y arista de longitud b con respecto al origen de coordenadas, situado en uno de los vértices, tomando los tres ejes coordenados sobre las tres aristas contiguas.

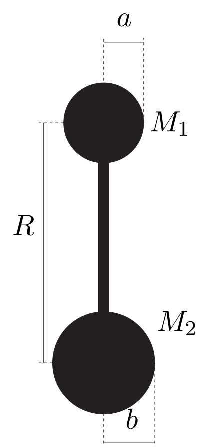

Fig. 1:

b) Encuentre los ejes principales de inercia respecto del origen y calcule el tensor de inercia para éstos últimos.

Problema 6: Utilizando coordenadas generalizadas, encuentre la expresión para la energía cinética de un cilindro homogéneo de radio a que rueda sin deslizar en el interior de una superficie cilíndrica de radio R (ver Figura 2).

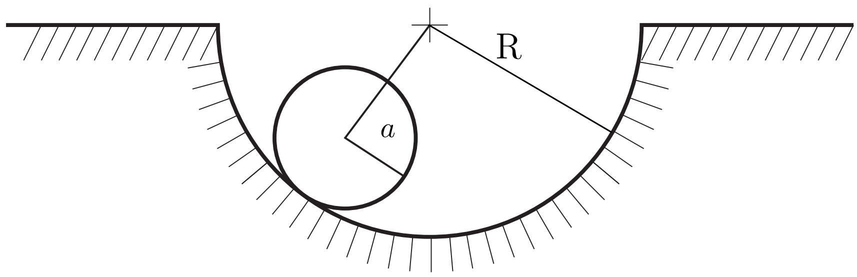

Fig. 2:

Problema 7: Como en el problema anterior, utilizando coordenadas generalizadas, encuentre la expresión para la energía cinética de un cilindro no homogéneo de radio R que rueda sobre un plano. La masa del cilindro está distribuida de modo tal que uno de los ejes principales de inercia respecto del centro de masas es paralelo al eje del cilindro, y está a una distancia a de éste. El momento principal de inercia correspondiente es I (ver Figura 3).

Problema 8: Describa el movimiento de una peonza simétrica libre cuyo momento angular respecto del centro de masas es $\vec{\ell}$ y su energía cinética es T. Suponga

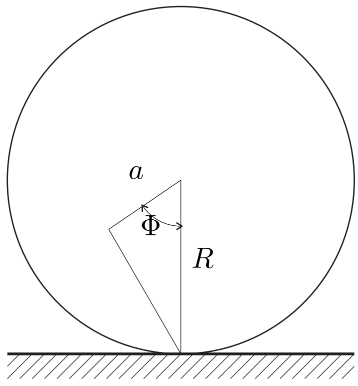

Fig. 3:

conocidos los momentos principales de inercia de la peonza respecto del centro de masas.

Problema 9: Una peonza simétrica rota con su punto inferior fijo al suelo. Se suponen conocidas las características del cuerpo (dimensiones, masa, momentos principales de inercia).

a) A partir de las coordenadas cíclicas en el Lagrangiano, determine los ángulos de Euler $\psi(t)$ y $\phi(t)$ en función de $\theta(t)$, siendo este último el ángulo que forma el eje de simetría de la peonza con la vertical (ver Figura 4).

b) Encuentre una expresión integral para $\theta(t)$ en función de integrales de movimiento surgidas de las simetrías del Lagrangiano.

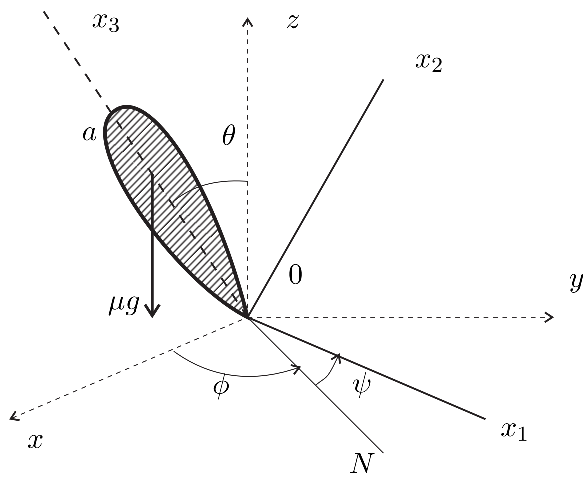

Fig. 4: