Mecánica Analítica. Trabajo Práctico 4

Movimiento oscilatorio.

Año 2017.

Problema 1: Dos péndulos semejantes de masa m y longitud L realizan pequeñas oscilaciones, acoplados por un resorte de masa despreciable y constante recuperadora k

a) Indique la(s) posición (es) de equilibrio estable del sistema. ¿Cómo las calcularía?

b) Determine la frecuencia de los modos normales de vibración.

c) Encuentre la solución de la ecuación de movimiento si las condiciones iniciales son: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = a$ y $\dot{x}_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$, donde x_i es el desplazamiento horizontal de cada partícula respecto de la vertical que pasa por el soporte correspondiente.

d) Determine las coordenadas normales para este sistema.

e) Describa cualitativamente el movimiento del sistema en cada modo.

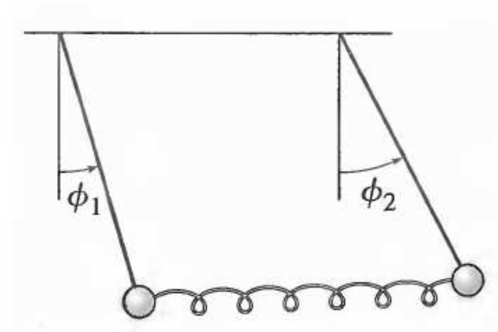

Fig. 1: Dos péndulos acoplados por un resorte.

Problema 2: Considere el sistema de la figura. Si se supone un movimiento vertical y se representan con y_1 y y_2 los desplazamientos de las masas m_1 y m_2 con respecto a sus posiciones de equilibrio. ¿Cuáles son dichas posiciones? ¿Cómo las obtiene?

a) Verifique que:

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 \dot{y}_2^2\right),$$

$$V = \frac{1}{2}k_1 y_1^2 + \frac{1}{2}k_2 \left(y_2 - y_1\right)^2 .$$

b) Escriba las ecuaciones de movimiento y las frecuencias características.

c) Identifique las cantidades conservadas del sistema.

d) Considere el caso en que $k_1 = k_2 = k$, y $m_1 = m_2 = m$. Para este caso, obtenga la solución de las ecuaciones de movimiento y las coordenadas normales para el sistema. ¿ Cómo se mueve el sistema en cada modo?

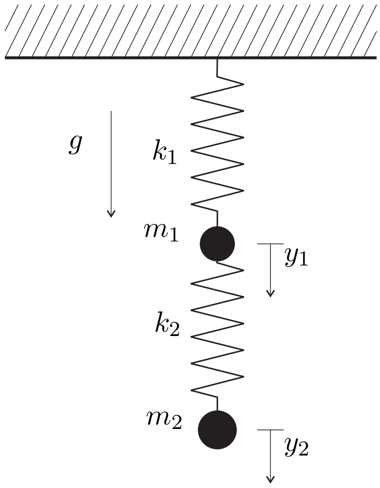

Fig. 2: Dos masas unidas por resortes en posición vertical.

Problema 3: Considere un péndulo doble, formado por dos masas m_1 y m_2 y de longitudes l_1 y l_2, cuyo movimiento está contenido en un plano.

a) Cuántos vínculos (y de qué tipo) tiene el sistema? Descríbalos. Indique los grados de libertad del sistema.

b) Escriba el lagrangiano del sistema.

c) Obtenga la(s) ecuación(es) de movimiento.

d) En la aproximación de pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable (¿cuál es?), reescriba el Lagrangiano del sistema.

e) Obtenga las frecuencias características y los modos normales del sistema en el caso $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$.

f) Describa cualitativamente el movimiento del sistema para cada uno de los modos normales de oscilación.

Problema 4: Sea una molécula triatómica lineal y simétrica. Ésta puede representarse por dos átomos de masa m que en el equilibrio están situados simétricamente en una línea a ambos lados del átomo central, de masa M, unidos a éste por resortes iguales de constante recuperadora k.

a) En el caso donde solamente se permita el movimiento en el eje de la molécula, escriba el Lagrangiano del sistema

b) Obtenga las frecuencias propias del sistema. Interprete

c) Calcule las coordenadas normales del sistema.

Problema 5: Se tiene un sistema conservativo de s grados de libertad que realiza pequeñas oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio. Muestre que las soluciones de las ecuaciones de movimiento pueden escribirse como

$$X(t) = \mathrm{Re} \sum_{\alpha=1}^{s} A^{(\alpha)} \exp(i\omega_\alpha t)$$

donde $A^{(\alpha)}$ es solución de la ecuación $(K - \omega_\alpha^2 M)A^{(\alpha)} = 0$, siendo K y M matrices de $s \times s$.

Problema 6: Se tiene un sistema conservativo de s grados de libertad que realiza pequeñas oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio. Las frecuencias propias del sistema son ω_α, con $\alpha = 1, \ldots, s$, soluciones de la ecuación $\det(K - \omega^2 M) = 0$, donde K y M son matrices simétricas de $s \times s$.

a) Muestre que las frecuencias propias son reales, e interprete físicamente este resultado.

b) Explique qué son las coordenadas normales, y en términos de éstas, interprete físicamente qué representa un modo normal cuya frecuencia propia es nula.

Problema 7: Sean dos cuerpos de masa m y otro de masa M unidos por tres resortes iguales de constante elástica k y longitud natural l_0 formando una circunferencia de radio R en el plano horizontal. La longitud de equilibrio de los resortes en la circunferencia es $l_{eq} = 2\pi R/3$

a) Escribir el Langrangiano del sistema, y a partir de éste obtener las ecuaciones de movimiento.

b) Encontrar los modos normales de oscilación alrededor de la posición de equilibrio y discutir el movimiento del sistema en cada caso.

c) Discutir el caso cuando $M = m$

Problema 8: Resuelva la ecuación de movimiento para un oscilador lineal sin rozamiento sometido a una fuerza externa senoidal cuya frecuencia es la de resonancia. Suponga que el sistema está en reposo en su posición de equilibrio en el instante en o que comienza a actuar la fuerza externa $[x(0) = 0, \frac{dx}{dt}(0) = 0]$. Grafique $x(t)$

Problema 9: Considere un oscilador lineal con amortiguamiento muy débil, $\gamma \ll 2\omega_0$

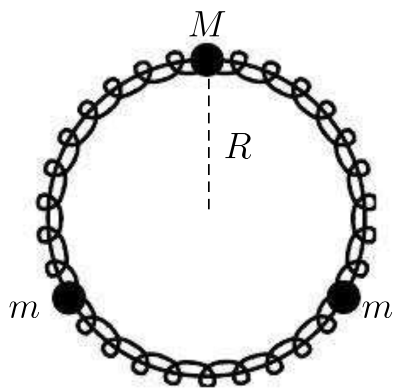

Fig. 3: Tres masas acoplados por 3 resortes.

a) Calcule en forma aproximada la velocidad y la aceleración de la partícula.

b) Calcule los valores medios de la energía cinética y potencial de la partícula (en la aproximación de amortiguamiento débil se puede suponer que la amplitud de la oscilación se mantiene constante en un período).
Demuestre que la energía media total varía según la siguiente ley:

$$E(t) = E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

donde $\tau = \frac{1}{\gamma}$ es la constante de tiempo de amortiguamiento.

Problema 10: Encuentre las ecuaciones de movimiento correspondientes a las oscilaciones libres de un sistema en los casos:

a) $\gamma = 0.2$ y $\omega_0 = 1$

b) $\gamma = 2$ y $\omega_0 = 1$

c) $\gamma = 10$ y $\omega_0 = 1$.
En todos los casos, suponer $x(0) = 1$ y $v(0) = 0$.