Mecánica Analítica

Trabajo Práctico 3 – Año 2017

Sistemas con un grado de libertad - Fuerzas centrales - Dispersión de partículas

Problema 1: Sin resolver la ecuación de movimiento, muestre que el período de oscilación de un péndulo simple de longitud ℓ, para el caso de pequeñas oscilaciones, viene dado por $2\pi\sqrt{\ell/g}$. Calcule la desviación porcentual respecto de este resultado para el caso en que el ángulo máximo formado por el péndulo con respecto a la vertical es de 45°.

Problema 2: Al enunciar sus leyes, Kepler consideró al Sol en el centro de la órbita elíptica realizada por los planetas. Según la tercera Ley de Kepler, el cuadrado del período de rotación de los planetas alrededor del Sol es proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse. (¿Cuales son las otras leyes? ¿Por qué son consideradas importantes?). Obtenga la constante de proporcionalidad entre el cuadrado del período y el cubo del radio mayor. (Ayuda: Como la constante de proporcionalidad es la misma para todas las órbitas es conveniente calcularla para una órbita circular)

Problema 3: Para el regulador de Watt del Problema 2 del TP2:

a) Dado el ángulo inicial θ_0, determine la máxima velocidad angular inicial ω_0 que puede tener el regulador de modo tal que la masa m_2 no choque contra el pivote superior. Si, en cambio, ω_0 es muy pequeña, ¿podría suceder que las masas m_1 choquen contra el eje?

b) Pruebe que el ángulo θ se mantendrá constante si los valores iniciales de ω y θ satisfacen la relación $\omega_0^2 \cos\theta_0 = g\,(1 + m_2/m_1)/l$.

Problema 4: Defina un potencial efectivo $V_{\rm ef}(r) = \ell^2/(2mr^2) + V(r)$ para cada uno de los siguientes potenciales centrales. En todos los casos, grafíquelo en función de r. Utilícelo para clasificar y representar cualitativamente las posibles órbitas. Además, indique para cuándo las órbitas serán cerradas y para qué valores de r y de energía serán circulares.

a) $V(r) = \dfrac{1}{2}kr^2$

b) $V(r) = \begin{cases} -V_1, & \text{para } r < a \\ 0, & \text{para } r > a \end{cases}$,

c) $V(r) = -\dfrac{k}{r^2}$.

Problema 5: Una partícula de masa m se mueve en una línea recta bajo la acción de una fuerza cuya energía potencial asociada es $V(x)$. Determine el período de oscilación de la partícula en función de su energía E, para los siguientes casos:

a) $V(x) = A\,|x|^n$

b) $V(x) = -\dfrac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$, con $-V_0 < E < 0$

c) $V(x) = V_0\,\tan^2(\alpha x)$

Problema 6: Resuelva la ecuación para la trayectoria de una partícula en un campo central $V(r) = -k/r$ (problema de Kepler - ¿porqué se lo conoce con este nombre?), integrando la ecuación diferencial de primer orden que se obtiene a partir de la conservación de E y ℓ.¿Por qué se conservan estas cantidades? Obtenga a partir de la órbita encontrada la constante de proporcionalidad entre el cuadrado del período y el cubo del radio mayor

Problema 7: Demuestre que para un potencial central de la forma $V(r) = -k/r$ el vector de Laplace-Runge-Lenz $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \frac{mk\vec{r}}{r}$ es una cantidad conservada.

Problema 8: Una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales de potencial $V(r) = -\dfrac{k}{r} + \dfrac{h}{r^2}$.

a) Demuestre que la ecuación de la órbita puede escribirse en la forma $r = p\,/\,[1 + \varepsilon\cos(\alpha\,\theta)]$.

b) Determine para qué valores de la energía las órbitas son acotadas y calcule los puntos de retorno en dichos casos. Represente en forma aproximada la trayectoria seguida por la partícula para pequeños valores de h, considerando los casos $h > 0$ y $h < 0$.

Problema 9: Calcule la sección eficaz diferencial para el scattering entre una partícula con carga $-Z'e$ y un potencial de Coulomb generado por un núcleo de carga $-Ze$ (e es la carga del electrón). Es decir, obtenga la a veces llamada "sección eficaz de Rutherford".

$$\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Theta} = \frac{1}{4}\left(\frac{ZZ'e}{2E}\right)^2 \csc^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)$$

donde E es la energía de la partícula incidente. ¿Por qué fueron tan importantes los experimentos de scattering/dispersión? ¿Qué observaciones y conclusiones realizó Rutherford a partir de este tipo de experimentos?

Problema 10: Calcule la sección eficaz para una *loma cuadrática*:

$$V(r) = \begin{cases} V_0\left(1 - r^2/R^2\right), & \text{para } r < R; \\ 0, & \text{para } r \geq R. \end{cases}$$

Problema 11: El *pozo rectangular* es un potencial central muy frecuente en la física nuclear. Está definido por:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & \text{para } r \leq a; \\ 0, & \text{para } r > a. \end{cases}$$

a) Muestre que la sección eficaz diferencial de dispersión para este potencial viene dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi) = \frac{n^2 a^2 \left(n \cos\frac{\chi}{2} - 1\right)\left(n - \cos\frac{\chi}{2}\right)}{4\cos\frac{\chi}{2}\left(1 + n^2 - 2n\cos\frac{\chi}{2}\right)^2}$$

donde $n = \sqrt{(E + V_0)/E}$, siendo E la energía del haz incidente.

b) Calcule la sección eficaz total.