Mecánica Analítica

Trabajo Práctico 2 − Año 2017

Ecuaciones de Lagrange - Coordenadas Cíclicas - Multiplicadores de Lagrange

Problema 1: Considere un péndulo formado por un resorte con una masa en su extremo. El resorte sólo puede deformarse en forma rectilínea, siendo l su longitud natural. Si en general la longitud del resorte es $l + x$, y el ángulo que forma con la vertical es θ (ver Figura 1), indique los grados de libertad del sistema, describa los vínculos y encuentr el Lagrangiano del sistema y las ecuaciones de movimiento. Suponga que el movimiento tiene lugar en el plano que contiene al resorte y a la vertical.

Problema 2: En el regulador de Watt representado en la Figura 2, el anillo m_2 se puede mover sin rozamiento sobre el eje vertical, y todo el sistema puede rotar, también sin rozamiento, alrededor de este eje. Indique los grados de libertad y los vínculos para este sistema. Escriba el Lagrangiano y, a partir de éste, determine las ecuaciones de movimiento. ¿Qué es un regulador de Watt? ¿Para qué se usa? ¿Por qué se llama "regulador"?

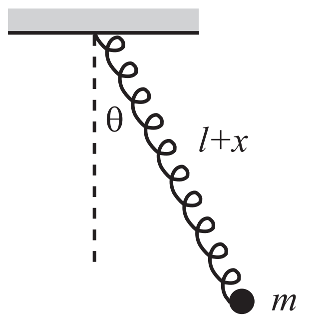

Figura 1: Problema 1: péndulo de resorte

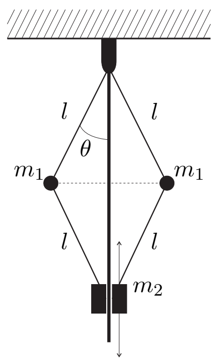

Figura 2: Problema 2: Regulador de Watt

Problema 3: Una taza de café de masa M está conectada con una pequeña masa m mediante un hilo inextensible y sin masa, de longitud l. La taza cuelga de una polea ideal, mientras que la masa m es sostenida de manera que el tramo de hilo que va de la masa a la polea, de longitud inicial r_0, se encuentra en posición horizontal (ver Figura 3). A partir de un dado instante $t = 0$ se suelta la masa m y el sistema comienza a moverse. ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema? ¿Cuántos vínculos y cuáles son? Encuentre el Lagrangiano y las correspondientes ecuaciones de movimiento. Suponga que los dos tramos de hilo pueden cruzarse pero no interactúan entre sí.

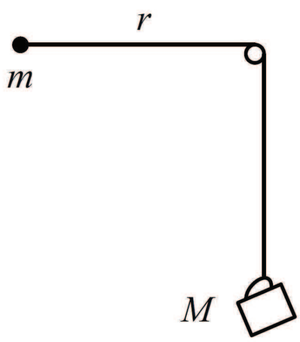

Figura 3: Problema 3 - Taza colgante

Problema 4: Enuncie el principio de mínima acción o principio de Hamilton. A partir de éste, obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange.¿Por qué la variación en los extremos es nula? ¿Qué es un desplazamiento virtual? Ilustre con un gráfico para el caso de una sola coordenada generalizada.

Problema 5: Pruebe que la curva de menor longitud que une dos puntos de un plano es una recta.

Problema 6: Resuelva el problema de la *braquistócrona*. Esto es: una partícula de masa m se mueve en un plano sobre una pista sin rozamiento, desde un punto (x_1, y_1) hasta un punto (x_2, y_2), bajo la acción de la fuerza gravitatoria $\vec{F} = m\vec{g}$. Determine la curva tal que el tiempo que tarda la partícula en llegar de un extremo al otro es mínimo. (Ayuda: encuentre una integral de movimiento y resuelva la ecuación diferencial de primer orden resultante).

Problema 7: Pruebe que las ecuaciones de Lagrange son invariantes ante una transformación puntual. Esto es, dados dos conjuntos de coordenadas generalizadas Q_k y q_k, tales que las Q_k pueden obtenerse a partir de las q_k mediante una transformación con jacobiano no nulo, pruebe que esta transformación no cambia la forma de las ecuaciones de Lagrange.

Problema 8: Retome los sistemas considerados en el ejercicio 4 de la Práctica 1:

- partícula sobre un plano horizontal
- partícula sobre un plano inclinado fijo al piso
- péndulo simple
- máquina de Atwood simple

a) Con el método de multiplicadores de Lagrange, obtenga las fuerzas de vínculo. En caso de haber más de una, puede primero probar calcular cada una por separado. Para ésto, revise qué vínculo está asociado a cuál(es) fuerza(s), y observe qué coordenada(s) queda(n) definida(s) por estos vínculos.

b) Compare lo obtenido en el punto anterior con las fuerzas de vínculo obtenidas a partir de las ecuaciones de Newton.

Problema 9: Considere un sistema aislado de N partículas cuyo potencial de interacción V es alguna función de las posiciones de éstas.

a) A partir de la descripción Lagrangiana, muestre que la homogeneidad del espacio conduce a la conservación de la cantidad de movimiento total del sistema.

b) Muestre que la isotropía del espacio lleva a la conservación del momento angular total del sistema

c) Muestre que la homogeneidad del tiempo lleva a la conservación de la energía

d) Muestre que la suma total de las fuerzas (gradientes de V) entre las partículas es cero.

Problema 10:

a) Determine los momentos conjugados para el sistema del Problema 10 de la Práctica 1 (partícula sobre superficie del cono). ¿Qué integrales de movimiento pueden determinarse para este sistema a partir de las simetrías del Lagrangiano?

b) Ídem anterior, para el regulador de Watt. Suponga que en el instante inicial el sistema está rotando alrededor del eje de simetría con velocidad angular ω_0. Vincule las integrales del movimiento obtenidas con la energía mecánica y el momento angular total del sistema.

Problema 11: Un esquiador de masa m se desliza por una pista de esquí semiesférica de radio R.

a) Encuentre la(s) coordenada(s) generalizada(s), el (o los) vínculo(s) existente(s), el Lagrangiano del sistema, la(s) correspondiente(s) ecuación(es) de movimiento y la energía del sistema.

b) Sabemos de Física I que a una dada altura el esquiador se "despega" de la montaña. ¿Se puede calcular esta altura con la formulación lagrangiana? (Suponga que inicialmente el esquiador se encuentra en la cima de la montaña.)

Problema 12: Un cilindro de masa m y radio r rueda sin deslizar en un plano, inclinado un ángulo ϕ, de longitud l.

a) Cuántos vínculos (y de qué tipo) tiene el sistema? Descríbalos.

b) Encuentre el lagrangiano del sistema.

c) Mediante el Método de Multiplicadores de Lagrange, determine la fuerza de roce y la normal.

Problema 13: Considere el ejercicio 11 de la práctica 1 (masa sobre un plano que no tiene roce con el piso). Para este sistema:

a) Indique las cantidades conservadas. Una de estas cantidades es el momento lineal en la dirección horizontal. Pase al sistema de coordenadas centro de masa y muestre que la posición del centro de masa en la coordenada horizontal es una variable cíclica, y por lo tanto implica la conservación del momento lineal en esta dirección.

b) Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, encuentre una expresión para la fuerza de contacto entre ambos bloques. Si lo desea, puede tratar de obtener esta misma expresión escribiendo las ecuaciones de Newton a partir de los diagramas de fuerzas, y comparar los resultados.

Problema 14: Un cilindro uniforme de masa m y radio a rueda sin deslizar sobre un cilindro fijo al piso de radio b como muestra la Figura 5. Si el cilindro más pequeño comienza a rodar partiendo del reposo en el tope del cilindro mayor,

a) Describa las fuerzas de vínculo.

b) Encuentre la ecuación de movimiento del cilindro de radio a, mientras rueda sin deslizar sobre la superficie del cilindro de radio b.

c) Encuentre el punto en el que el cilindro pequeño se cae del cilindro mayor

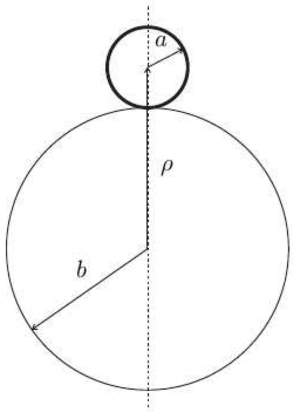

Figura 5: Cilindro rodando sobre cilindro - instante inicial