Mecánica Analítica. Trabajo Práctico 1 – Año 2017

Grados de libertad - Vínculos - Coordenadas generalizadas -

Desplazamientos virtuales - Ecuaciones de Lagrange

Problema 1. Encuentre el número de grados de libertad y proponga coordenadas generalizadas para los siguientes sistemas físicos. Realice un esquema donde indique claramente el sistema de coordenadas elegido. Determine en cada caso las ecuaciones de transformación que relacionan las coordenadas cartesianas con las generalizadas. Escriba las ecuaciones de ligadura e indique de qué tipo son.

a) Una partícula moviéndose en la superficie interna de un cuenco semiesférico.

b) Un péndulo esférico.

c) Una máquina de Atwood doble (ver Figura 1).

d) Un bloque desplazándose (sin rozamiento) por un plano inclinado un ángulo θ.

Problema 2. Considere un sistema de N partículas de coordenadas cartesianas $\vec{r}_i$, vinculadas por ligaduras holónomas tales que el sistema tiene s grados de libertad.

a) Enuncie el principio de D'Alembert, indicando sus condiciones de validez.

b) A partir del principio de D'Alembert obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange. Indique qué condiciones deben cumplir las fuerzas que actúan

Problema 3. Una cuenta de masa m desliza sin fricción por un alambre recto sin masa que, a su vez, rota alrededor de un eje vertical con una velocidad angular constante ω como muestra la Figura 2.

a) Encuentre la ecuación de movimiento de la cuenta mediante el *principio de D' Alembert*. Estudie los casos $\omega = 0$ y $\alpha = 0$

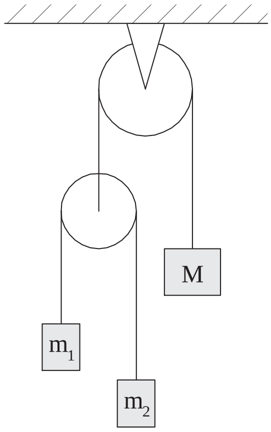
b) Encuentre la ecuación de movimiento utilizando las ecuaciones de Lagrange. Compare con lo obtenido en el punto anterior.

Problema 4. Considere los siguientes casos:

I partícula en tiro vertical

II partícula sobre un plano horizontal

III partícula sobre un plano inclinado fijo al piso



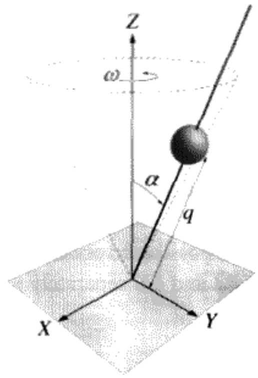


Figura 1: Máquina de Atwood doble

Figura 2: Problema 3

iv péndulo simple

v máquina de Atwood simple

Para cada caso:

a) Realice el diagrama de fuerzas. Indique claramente el sistema de coordenadas elgido. Utilizando las leyes de Newton, encuentre las ecuaciones de movimiento.

b) Indique los vínculos. ¿De qué tipo son? ¿Por qué? ¿Qué fuerzas de ligadura están asociadas a estos vínculos?

c) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema? Elija coordenadas generalizadas, indicando claramente el sistema de referencia y los cambios de coordenadas, si son necesarios.

d) Escriba el Lagrangiano y obtenga a partir de éste las ecuaciones de movimiento. ¿Por qué es posible utilizar la formulación Lagrangiana en estos casos?

Para el primer caso (tiro vertical)

e) ¿Cómo cambian las respuestas a todos puntos anteriores si se considera una partícula en caida libre? ¿ Y si fuera un tiro oblicuo?

Problema 5. Imagine ahora que el soporte del péndulo simple del **Problema 4** oscila horizontalmente, siendo la posición del punto de apoyo $x(t) = A\cos(\omega t)$ (ω constante).¿Cuáles son las ecuaciones de ligadura del sistema ahora? ¿Cuántos grados de libertad tiene? ¿Cómo se ven modificados el Lagrangiano y la ecuación de movimiento para el ángulo θ que forma el péndulo con la vertical?

Problema 6. Dos masas iguales m, conectadas por una cuerda sin masa e inextensible, cuelgan de dos poleas (que consideraremos ideales), como muestra la Figura 3. La masa de la izquierda sólo puede moverse en la dirección vertical, mientras que la de la derecha puede balancearse libremente en el plano donde están las poleas y las masas.

a) Indique cuáles y cuántos son los grados de libertad del sistema

b) Enuncie los vínculos y de qué tipo son

c) Encuentre el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para r y θ.

d) Suponga ahora que la masa de la izquierda está inicialmente en reposo, y la masa de la derecha se mueve con pequeñas oscilaciones con una amplitud angular ϵ (siendo $\epsilon \ll 1$). ¿Cuál es la aceleración inicial promedio (sobre unos pocos períodos) de la masa de la izquierda? ¿En qué dirección se mueve?

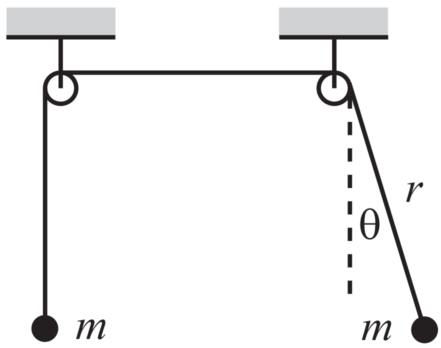


Figura 3

Problema 7. Escriba el Lagrangiano, y a partir de éste halle las ecuaciones de movimiento para

a) el péndulo esférico del **Problema 1 b)**

b) la Máquina de Atwood doble del **Problema 1 c)**

c) el bloque del **Problema 1 d)**

Problema 8. Considere un sistema de N partículas en el que existen r ligaduras holónomas y escleronómas.

a) Indique cuántas son las coordenadas generalizadas q_k, y pruebe que la energía cinética es una función homogénea de grado 2 de las velocidades generalizadas $\dot{q}_k$.

b) Si el sistema es conservativo, pruebe que el cambio en el tiempo del potencial viene dado por

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{k=1}^{s} Q_k \, \dot{q}_k \ ,$$

donde s es el número de grados de libertad del sistema y Q_k son las fuerzas generalizadas. Interprete físicamente este resultado.

c) Determine si siguen siendo válidas en general las proposiciones demostradas en los puntos anteriores cuando las ligaduras son reónomas.

Problema 9. Para un sistema de N partículas en el que existen r ligaduras holónomas, a partir del principio de D'Alembert pueden obtenerse las ecuaciones

$$Q_k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_k} \;=\; 0 \;, \qquad k = 1, \;\ldots\;, 3N - r \;,$$

donde T es la energía cinética del sistema y Q_k son las fuerzas generalizadas. Muestre que si las Q_k tienen en cuenta a todas las fuerzas actuantes, y las q_k son las coordenadas cartesianas de las partículas, a partir de las ecuaciones anteriores se recupera la segunda ley de Newton.

Problema 10. Indique los grados de libertad y los vínculos para una partícula de masa m que se desliza sin rozamiento sobre la superficie de un cono invertido cuyo ángulo de inclinación es θ. Realice un esquema para mostrar el sistema de coordenas elegido. Escriba el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento.

Problema 11. Un plano inclinado de masa M y ángulo θ descansa sobre una superficie horizontal sin fricción. Sobre el plano se encuentra un bloque de masa m, inicialmente en reposo (ver Figura 4). Suponiendo que tampoco hay fricción entre las superficies del bloque y el plano, indique cuántos grados de libertad tiene el sistema y cuáles y de qué tipo son los vínculos. Encuentre el lagrangiano del sistema y las correspondientes ecuaciones de movimiento. Determine la aceleración con que se moverá el plano inclinado.

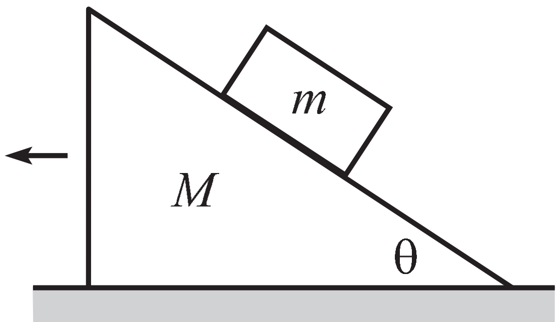


Figura 4: Bloque sobre un plano inclinado móvil

Problema 12. Sea un péndulo simple de longitud l y masa m, cuyo soporte gira con velocidad angular ω constante en un plano vertical describiendo un círculo de radio a (Figura 5)

a) Indique cuántos grados de libertad tiene el sistema. Describa el(los) vínculo(s)

b) Encuentre la(s) coordenada(s) generalizada(s) y escriba la(s) ecuación(es) de transformación que relacionan estas coordenadas con las cartesianas

c) Escriba el Lagrangiano del sistema

d) Encuentre la(s) ecuación(es) de movimiento del sistema

Problema 13. En los problemas de esta práctica, se han considerado situaciones donde la energía potencial V es solamente función de las coordenadas generalizadas.

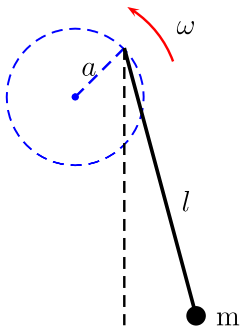


Figura 5: Péndulo cuyo soporte realiza un movimiento circular

La formulación Lagrangiana también puede aplicarse considerando un potencial U dependiente de la velocidad, llamado a veces "potencial generalizado", de manera que $L = T - U$.

Éste es el caso relacionado con las fuerzas ejercidas por los campos eléctrico y magético en partículas cargadas.

a) Escriba la fuerza de Lorentz que se ejerce sobre una partícula de carga q y masa m con velocidad $\mathbf{v}$ bajo la acción de un campo eléctrico $\mathbf{E}$ y uno magnético $\mathbf{B}$.

El campo eléctrico $\mathbf{E}$ y el magnético $\mathbf{B}$ pueden escribirse como funciones de un campo escalar $\Phi(t, x, y, z)$ y de uno vectorial $\mathbf{A}(t, x, y, z)$, de manera que

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

y puede entonces definirse el potencial generalizado $U = q\phi - q\mathbf{A}\mathbf{v}$

b) Construya el Lagrangiano para la partícula de carga q utilizando el potencial generalizado. Obtenga las ecuaciones de movimiento a partir de éste. Muestre que así se obtiene la llamada "fuerza de Lorentz"-