Mecánica Analítica. Trabajo Práctico 0.

Revisión matemática.

Año 2017.

1 Desarrollo en serie

Problema 1. Utilizando el Teorema de Taylor, escriba el desarrollo en serie de una función $f(x)$ derivable en un entorno de x_0.

a) Si en x_0 la función $f(x)$ presenta un mínimo, ¿qué puede decir de dicho desarrollo?

b) Sea $f(x, y)$ una función de dos variables que admite derivadas parciales, escriba el desarrollo en serie, hasta segundo orden, de la función en un entorno de (x_0, y_0).

Problema 2. Aproximación binomial.

a) Encuentre una aproximación para $(1 + x)^n$ cuando x es pequeño.

b) Pruebe que si n es un número entero mayor o igual que cero, la serie es finita.
Nota: la serie converge para todo n si $-1 < x < 1$.

Problema 3. Desarrolle en serie las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, con x expresado en radianes, y aproxime para el caso $x \ll 1$.

b) $g(x) = \cos x$, con x expresado en radianes, y aproxime para el caso $x \ll 1$.

c) $h(x) = \exp x$, y aproxime para el caso $x \ll 1$.
Nota: estas series convergen para todo x.

Problema 4. Suponiendo que la serie de potencias para $f(x) = \exp(x)$ vale también para números complejos, muestre que:

a) $\exp(ix) = \cos x + i \operatorname{sen} x$.

b) $\exp(-ix) = \cos x - i \operatorname{sen} x$.
Nota: estas igualdades se llaman *Identidades de Euler.*

2 Trigonometría.

Problema 5. Utilizando la función exponencial, pruebe las siguientes identidades:

a) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b) $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

Problema 6.

a) Utilizando los resultados del problema anterior, encuentre expresiones para $\operatorname{sen}(2\theta)$ y $\cos(2\theta)$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

b) Pruebe la siguiente identidad: $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}[(\alpha+\beta)/2]\cos[(\alpha-\beta)/2]$.

3 Vectores.

Problema 7. Delta de Kronecker (δ_{ij}) y tensor de Levi-Civita (ε_{ijk}).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si } (i,j,k) \text{ es una permutación par de } (1,2,3); \\ -1, & \text{si } (i,j,k) \text{ es una permutación impar de } (1,2,3); \\ 0, & \text{si hay índices repetidos.} \end{cases}$$

Muestre que:

a) $\delta_{ii} = 3$

b) $\delta_{ij}\,\varepsilon_{ijk} = 0$

c) $\varepsilon_{ipq}\,\varepsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}$

d) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 6$

e) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\,\delta_{jq} - \delta_{iq}\,\delta_{jp}$
Nota: en las expresiones anteriores se ha utilizado la notación de Einstein (suma sobre índices repetidos).

Problema 8. Exprese las componentes del vector $\mathbf{C}$, $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, en términos de ε_{ijk} y las componentes de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

Problema 9. Triple producto escalar. Pruebe que el producto escalar y vectorial pueden "intercambiarse":

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

Problema 10.

a) Verifique las siguientes identidades para el triple producto vectorial:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

b) Pruebe que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ si y sólo si $(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{B} = 0$

c) Pruebe la *Identidad de Jacobi*:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{A} + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} = 0$$

4 Operadores diferenciales y sistemas de coordenadas.

Problema 11. Gradiente, ∇.
Calcule el gradiente de una función de r, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Problema 12. Si $\mathbf{F}$ es una función vectorial que depende de las coordenadas (x, y, z) y el tiempo t, muestre que:

$$d\mathbf{F} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} dt.$$

Problema 13. Muestre que $\nabla(u\,v) = v\nabla u + u\nabla v$, donde u y v son funciones escalares diferenciables de x, y y z.

Problema 14. Divergencia, $\nabla\cdot$.

a) Calcule $\nabla \cdot \mathbf{r}$.

b) Generalice para $\nabla \cdot \big(\mathbf{r} f(r)\big)$.

Problema 15. Para una partícula moviéndose en una órbita circular, con origen de coordenadas en el centro de la misma, y velocidad angular constante, se tiene $\mathbf{r} = r\cos(\omega t)\,\mathbf{i} + r\sin(\omega t)\,\mathbf{j}$.

a) Evalúe $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$.

b) Muestre que $\ddot{\mathbf{r}} + \omega^2 \mathbf{r} = 0$.

Problema 16. Rotor, $\nabla\times$.

a) Muestre que $\nabla \times (f\mathbf{V}) = f\nabla \times \mathbf{V} + (\nabla f) \times \mathbf{V}$, donde f es una función escalar y $\mathbf{V}$ una función vectorial.

b) Calcule $\nabla \times \big(\mathbf{r} f(r)\big)$

Problema 17. Pruebe que:

a) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \dfrac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \dfrac{d\mathbf{B}}{dt}$,

b) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \dfrac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \dfrac{d\mathbf{B}}{dt}$,

c) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$

Problema 18.

a) A partir de las ecuaciones de Maxwell puede verse que el campo eléctrico $\mathbf{E}$ y el campo magnético $\mathbf{B}$ pueden escribirse en términos de un potencial escalar $\phi(x, y, z, t)$ y un potencial vector $\mathbf{A}(x, y, z, t)$, de acuerdo con

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}\ , \qquad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\ .$$

Verifique que, en efecto, se satisfacen las ecuaciones de Maxwell homogéneas,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0\ , \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0\ .$$

b) En presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}$ y un campo magnético $\mathbf{B}$, sobre una partícula de carga q y velocidad $\mathbf{v}$ actúa una fuerza $\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (fuerza de Lorentz). Pruebe que ésta puede obtenerse a partir de un potencial V dado por

$$V(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) \;=\; q\,\phi - q\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

a través de la relación

$$\mathbf{F} \;=\; -\nabla V + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}}\right) \;,$$

donde $(\partial V/\partial \mathbf{v})_i \equiv \partial V/\partial v_i$.

Problema 19. Escriba las coordenadas cartesianas (x, y, z) en:

a) coordenadas esféricas,

b) coordenadas cilíndricas.

c) Calcule el módulo del vector velocidad $d\mathbf{r}/dt$ en coordenadas esféricas y coordenadas cilíndricas, esto es, en términos de r, θ, ϕ, z y sus derivadas temporales $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, $\dot{z}$, $\dot{\phi}$, según corresponda.

Problema 20. Sean $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función escalar y $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función vectorial, diferenciables, calcule $\nabla\Psi$, $\nabla \cdot \mathbf{V}$ y $\nabla \times \mathbf{V}$ en:

a) coordenadas cartesianas,

b) coordenadas cilíndricas.

c) coordenadas esféricas.

Problema 21. Para Ψ y $\mathbf{V}$ definidos como en el problema anterior, pruebe que:

a) $\nabla \times (\nabla\Psi) = 0$.

b) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0$.

5 Matrices.

Problema 22. Muestre que el producto de matrices es asociativo, esto es, $(\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{A}(\mathrm{BC})$.

Problema 23.

a) Construya un ejemplo numérico para mostrar que la multiplicación de matrices no es conmutativa.

Sea el conmutador de matrices $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$.

b) Muestre que $(\mathrm{A} + \mathrm{B})(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2$, si y sólo si $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = 0$.

c) Verifique la identidad de Jacobi:

$$[[\mathrm{A}, \mathrm{B}], \mathrm{C}] + [[\mathrm{B}, \mathrm{C}], \mathrm{A}] + [[\mathrm{C}, \mathrm{A}], \mathrm{B}] = 0 \;.$$

Problema 24. Mediante un ejemplo numérico pruebe que si $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$, en general $\det \mathrm{C} \neq \det \mathrm{A} + \det \mathrm{B}$.

Problema 25. Sea B una matriz de 3×3 de elementos B_{ij}. Verifique que:

a)

$$\det \mathrm{B} = \varepsilon_{ijk} B_{il} B_{jm} B_{kn},$$

donde lmn es una permutación cíclica cualquiera de 123.

b)

$$\varepsilon_{rst} \det \mathrm{B} = \varepsilon_{ijk} B_{ir} B_{js} B_{kt}.$$

(Ayuda: tenga en cuenta que al permutar dos columnas de una matriz su determinante cambia de signo, y que si dos columnas de una matriz son iguales, su determinante es cero.)

Problema 26. Usando las propiedades del problema anterior, muestre que si C es una matriz de 3×3 producto de las matrices A y B, entonces $\det \mathrm{C} = \det \mathrm{A} \det \mathrm{B}$. Nota: el resultado es válido en general para cualquier matriz de $n \times n$.