Física General II

Trabajo Práctico 9: Ondas (I)

1. La expresión $y(x,t) = \dfrac{a}{3+(b\,x - c\,t)^2}$, donde $a = 6$ cm, $b = 0.5$ cm^{-1} y $c = 1.5$ s^{-1}, describe la propagación de un pulso a lo largo de una cuerda horizontal tensa.

   (a) Graficar el pulso para $t = 0$, 1 y 2 s. Comparando las distintas gráficas, ¿qué puede decirse de la forma de la función?

   (b) Hallar la posición del máximo (punto de la cuerda ubicado a mayor altura) para cada uno de los instantes indicados.

   (c) Determinar con qué velocidad se mueve el máximo. ¿Es esta velocidad constante en el tiempo? Al describir el "movimiento del máximo", ¿se está haciendo referencia al movimiento de algún punto particular de la cuerda?

   (d) ¿Puede escribirse la función $y(x,t)$ en la forma $f(x - vt)$? ¿Cuál es en ese caso el valor de v? ¿Se trata de la misma velocidad considerada en el ítem anterior?

   (e) Considerar en particular una pequeña porción de cuerda ubicada en $x = 3$ cm. ¿Se mantiene esta porción de cuerda siempre en la misma posición con respecto al eje x? ¿En qué direcciones puede moverse? Determinar su velocidad (módulo, dirección y sentido) en los instantes $t = 0$, 1 y 2 s.

   (f) ¿Cómo podría modificarse la función $y(x,t)$ para que describa a un pulso de la misma forma, pero que se propague en la dirección opuesta? En general, para una onda viajera descripta por una función $y = f(x - vt)$, ¿cambia la forma de la onda si se cambia el parámetro v?

2. En el instante $t = 0$, un pulso de onda transversal en un cable viene descripto por la función $y(x,0) = a\,e^{-(x-b)^2/c}$, donde $a = 0.3$ m, $b = 1$ m y $c = 4$ m^2. El pulso se mueve en el sentido positivo del eje x con una rapidez de 4 m/s.

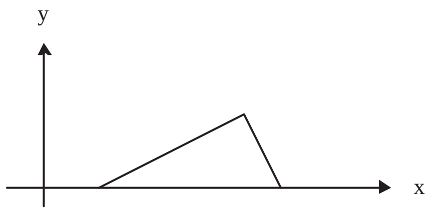
   (a) Escribir la función $y(x,t)$ que describe a esta onda y graficar su forma aproximada para $t = 0$ y $t = 1$ s.

   (b) Determinar la posición que tiene en el instante $t = 1$ s un pequeño segmento de cable ubicado en la coordenada $x = 3$ m. Determinar su velocidad en ese instante.

3. (a) Mostrar que la expresión que describe la propagación del pulso del problema 1 es solución de la ecuación $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ (ecuación de onda en una dimensión), determinando el correspondiente valor de v. ¿Cualquier función de la forma $f(x \pm vt)$ es solución de esta ecuación?

   (b) ¿Bajo qué aproximaciones puede obtenerse la ecuación anterior a partir de las leyes de Newton, para el caso de una cuerda tensa? ¿De qué magnitudes depende la velocidad de las ondas que se propagan? ¿Qué propiedades debe tener la cuerda para que no se disipe la energía?

4. La curva y versus x representada en la figura corresponde a un pulso asimétrico sobre una cuerda en un instante dado. El pulso se desplaza sobre la cuerda con una velocidad v en el sentido de los x positivos.

   (a) Elegir dos puntos de la cuerda, y representar para estos puntos una gráfica cualitativa de y versus t.

   (b) Para cada uno de esos puntos representar una gráfica cualitativa de la componente u_y de su velocidad en función del tiempo.

5. En la superficie de un lago se propagan pequeñas olas que pueden describirse en términos de una onda armónica unidimensional transversal. En un dado sistema de ejes coordenados la propagación de esta onda viene dada por la función $y(x,t) = A\ \mathrm{sen}\,(k\,x - \omega t + \pi/4)$. La velocidad de propagación de la onda es de 15 cm/s, su amplitud es $A = 8$ cm y la distancia entre cresta y cresta es de aproximadamente 75 cm.

   (a) ¿Qué significa que la onda sea transversal? ¿Cuál es la máxima distancia que puede desplazarse una molécula de agua respecto de la superficie no perturbada?

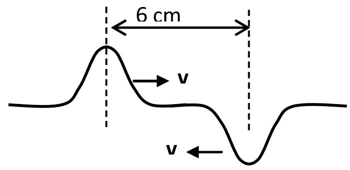
(b) Determinar la longitud de onda y la frecuencia de esta onda armónica. Hallar el número de onda k y la frecuencia angular ω. ¿Cuál es el significado físico de la constante $\pi/4$ en el argumento del seno?

(c) Graficar la superficie del agua (es decir, y versus x) para el instante $t = 0$. ¿Cuál es la altura de una molécula de agua de la superficie ubicada en $x = 20$ cm? Repetir el gráfico, ahora para $t = 1$ s, determinando nuevamente la altura de la molécula ubicada en $x = 20$ cm. ¿Es ésta la misma molécula que se consideró anteriormente?

(d) Describir el movimiento de la molécula de agua ubicada en $x = 20$ cm. ¿De qué tipo de movimiento se trata? ¿Qué parámetros lo caracterizan? Determinar la velocidad de esta molécula en el instante $t = 0$. ¿Cuál es la máxima velocidad que puede alcanzar esta molécula? ¿Y las demás moléculas de la superficie? ¿Cuántas veces por segundo se encuentra una molécula en la cresta de una ola?

(e) En general, en un la superficie de un lago se propagan ondas bidimensionales. ¿En qué caso puede ser válida la descripción en términos de una onda unidimensional, como se propone en este problema?

6. Dos pulsos viajan a lo largo de una cuerda en direcciones opuestas, como se muestra en la figura. Si la velocidad de las ondas en la cuerda es de 2 m/s, graficar la forma de la cuerda después de 5, 15 y 20 ms. ¿Qué ocurre con la energía mecánica en $t = 15$ ms?



7. Dos ondas armónicas de igual frecuencia y longitud de onda, ambas de amplitud A, viajan en la misma dirección, produciéndose interferencia entre ambas.

   (a) Encontrar la amplitud de la onda resultante si la diferencia de fase entre las dos ondas originales es de $\pi/2$ radianes. ¿Es la resultante también una onda armónica?

   (b) Calcular la diferencia de fase necesaria para que la amplitud resultante sea A y $A/2$. ¿Qué sucede si la diferencia de fase es de π radianes?

8. Describir lo que sucede con la energía transportada por una onda transversal sobre una cuerda cuando en un dado punto ésta está unida a otra cuerda de mayor densidad lineal de masa. Para el caso de un pulso como los de los problemas 1 y 2, analizar qué ocurrirá con la forma del pulso y con su velocidad de propagación a ambos lados de la interfase. Si se propaga una onda armónica, ¿que ocurre con la frecuencia, la longitud de onda, la fase y la amplitud cuando la onda alcanza el punto de contacto entre las cuerdas?

9. Una cuerda de densidad lineal de masa $\mu = 70$ g/m está sometida a una tensión de 80 N. Calcular la potencia media que debe suministrarse a esta cuerda para generar ondas armónicas de 50 Hz que tengan una amplitud de 6 cm.

10. Una cuerda uniforme fija en ambos extremos tiene una longitud de 8.35 m y una masa de 120 g. Estando sujeta a una tensión de 97 N, se la pone a vibrar.

    (a) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda estacionaria más larga posible?

    (b) Hallar la frecuencia fundamental y las frecuencias de los dos primeros armónicos.

11. La función que describe una cierta onda estacionaria sobre una cuerda fija en ambos extremos está dada por $y(x,t) = 2A \operatorname{sen}(kx)\cos(\omega t)$, donde $A = 1.5$ cm, $k = 0.3$ cm^{-1} y $\omega = 500$ rad/s.

    (a) Proponer dos ondas armónicas cuya superposición pueda dar lugar a esta onda estacionaria.

    (b) ¿Cuál es la distancia entre dos nodos sucesivos? Determinar la mínima longitud que puede tener la cuerda para que esta onda estacionaria pueda existir.

    (c) Calcular la longitud de la cuerda si está vibrando en su cuarto armónico.

    (d) Determinar el desplazamiento y la velocidad de la partícula de la cuerda ubicada en la posición $x = 1.5$ cm en el instante $t = 0.2$ s. ¿Cuántas oscilaciones completas han llevado a cabo las partículas de la cuerda desde el instante $t = 0$?

12. Una cuerda tensa horizontal de 120 cm tiene un extremo fijo, mientras que el otro extremo está unido a un anillo de masa despreciable que puede deslizarse a lo largo de una barra vertical sin fricción. ¿Cuáles son las tres longitudes de onda más largas posibles que pueden tener las ondas estacionarias formadas en la cuerda? ¿Existe algún límite superior para las frecuencias que puedan tener estas ondas estacionarias?

13. Considerar una onda estacionaria de la forma dada en el problema 11, que vibra sobre una cuerda tensa de densidad lineal μ.

(a) Calcular la energía cinética $K(t)$ para un pequeño tramo de cuerda de longitud Δx ubicado en la posición x_0.

(b) Describir la forma que tiene la cuerda en el instante en que la energía cinética total $K_{\mathrm{tot}}(t)$ es máxima y en el instante en que es mínima. ¿Cuál es este valor mínimo de K_{tot}?

(b) Probar que la energía cinética total máxima para cada porción de cuerda entre dos nodos viene dada por $K = \pi A^2\omega^2\mu/k$.

Videos: recomendamos ver el video "Ondas transversales y longitudinales", disponible en la página web de la materia. Se trata de un breve video donde se muestra la propagación de ondas transversales y longitudinales en un muelle.

Simulaciones: recomendamos ejecutar y discutir con los docentes la simulación "Ondas transversales en una dimensión", disponible en la página web de la materia.

Problemas adicionales:

14. En una cuerda tensa se desea producir una onda transversal armónica que se propague con una velocidad de 40 m/s. Para ello se mueve uno de los extremos de la cuerda con un movimiento armónico simple de 1 cm de amplitud, y una frecuencia de 15 Hz. La cuerda es uniforme, tiene 7 m de longitud y una masa total de 50 g.

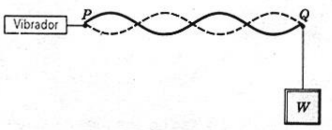
(a) ¿A qué tensión debe estar sometida la cuerda?

(b) Eligiendo un sistema de ejes coordenados, obtener una función $y(x,t)$ que describa a la onda cuando ésta está a punto de alcanzar el otro extremo de la cuerda. ¿Qué ocurrirá luego?

(c) Determinar la máxima velocidad que puede alcanzar cada pequeña porción de cuerda.

(d) ¿Cómo se modificaría la onda si la tensión de la cuerda fuera el doble de la hallada en el ítem (a)? Indicar si se verían modificadas su frecuencia, su longitud de onda y/o su amplitud.

15. En el arreglo representado en la figura, un vibrador pone en movimiento una cuerda con una frecuencia de 120 Hz. La cuerda tiene una longitud $L = 1.2$ m y su masa total es de 20 g/m. ¿Cuál debe ser la masa del cuerpo colgante para obtener el patrón de movimiento de 5 nodos que se muestra en la figura?



16. Una cuerda de guitarra de 0.75 m de longitud tiene una frecuencia fundamental de 440 Hz.

(a) ¿Cuál es la velocidad de una onda transversal sobre esta cuerda?

(b) Para producir otras frecuencias, la longitud efectiva L de la cuerda se acorta presionando sobre ella en un punto por debajo de su extremo. ¿Dónde debe presionarse para producir una frecuencia fundamental de 660 Hz?

17. (Optativo) Una cuerda uniforme de masa m y longitud L cuelga de un techo.

(a) Probar que la rapidez de una onda transversal sobre la cuerda no es constante, sino que depende de la distancia al extremo inferior como $v(y) = \sqrt{gy}$.

(b) Probar que el tiempo que tarda una onda transversal en recorrer toda la cuerda es $t = 2\sqrt{L/g}$.

Algunos resultados: 1b) $(x_M, y_M) = (0, 2\text{ cm}), (3\text{ cm}, 2\text{ cm}), (6\text{ cm}, 2\text{ cm})$; 1c) $v = 3$ cm/s; 1e) $u_y = 0.98$ cm/s, 0, -0.98 cm/s; 2) $y(3\text{ m}, 1\text{ s}) = 0.11$ m, $u_y = -0.44$ m/s; 5a) $d_{\text{máx}} = 8$ cm; 5b) $k = 8.38\text{ m}^{-1}$, $\omega = 1.26$ rad/s; 5c) $h(t=0) = 5.03$ cm, $h(t = 1\,\text{s}) = 7.47$ cm; 5d) $|\vec{u}| = 7.83$ cm/s, $|\vec{u}|_{\text{máx}} = 10.1$ cm/s; 7a) $A_{\text{res}} = \sqrt{2}\,A$; 7b) $\Delta\phi = 2\pi/3$ rad, $\Delta\phi = 2.64$ rad; 9) $\langle \text{Pot} \rangle = 995$ W; 10a) $\lambda_1 = 16.7$ m; 10b) $f_1 = 4.92$ Hz, $f_2 = 9.84$ Hz, $f_3 = 14.8$ Hz; 11b) $d = 10.5$ cm; 11c) $L = 52.4$ cm; 11d) $y = 1.12$ cm, $u_y = 330$ cm/s, $n = 15$; 12) $\lambda = 4.8$ m, 1.6 m, 0.96 m; 13a) $K(t) = 2A^2\omega^2\mu\Delta x \,\text{sen}^2(kx)\,\text{sen}^2(\omega t)$; 14a) $T = 11.4$ N; 14c) $|\vec{u}|_{\text{máx}} = 0.94$ m/s; 15) $m = 8.82$ kg; 16) debe ser $L' = 0.5$ m.