1. Estudio de la caída de un puente.

A. Introducción

Las oscilaciones de un puente bajo la acción de una fuerza externa pueden estudiarse a partir de la resolución de una ecuación a derivadas parciales no homogénea. Factores como el viento puede dar lugar a una fuerza externa capaz de ser responsable de la caida de un puente (como el puente de Tacoma en 1940,Estado de Washington, USA), o el paso de una columna de soldados (caida del puente de Manchester, Inglaterra, 1831). Estos ejemplos han sido citados en los libros de texto sobre ecuaciones diferenciales a derivadas parciales como ejemplos del fenómeno de *resonancia*. El fenómeno de resonancia ocurre cuando la frecuencia de la fuerza externa coincide con la frecuencia de oscilación del puente. En este sentido, modelar las vibraciones de un puente a través de una ecuación a derivadas parciales es un gran paso a la hora de entender el problema real.

B. Modelo sencillo para la marcha de soldados sobre un puente.

Cuando una columna de soldados marcha al unissono sobre un puente, se ejerce una fuerza vertical $f(x,t)$ sobre el puente, la cual es periódica en el tiempo t, quedando su período P determinado por el intervalo de tiempo entre los pasos de los soldados. En este problema unidimensional no distinguimos los pasos izquierdos de los derechos. En realidad los pasos derechos-izquierdos crearían vibraciones adicionales sobre el ancho del puente, efectos que en algunos casos es importante para descripción de la caida del puente. Este aspecto puede tenerse en cuenta introduciendo una dimension espacial mas en el modelo. Nosotros no tendremos en cuenta este efecto.

En nuestro análisis vamos a modelar el puente como la cuerda de una guitarra de longitud L, suspendido solo a $x = 0$ y $x = L$. (Sabemos que los puentes no se comportan como cuerdas elásticas, sin embargo esta simplificación permite evitar conocer la estructura mecánica del puente y aun así retener los ingredientes necesarios para entender el problema de *resonancia*). Supondremos que la tensión T es uniforme e gual a la fuerza por unidad de área ejercida sobre los puntos de suspensión $x = 0$ y $x = L$. Como el puente está sostenido en los dos extremos, la fuerza vertical en cada uno es igual a la mitad del peso del puente, y debe ser igual a la proyección de T sobre la dirección vertical

$$T \sin\alpha = \frac{\rho L A g}{2A} = \frac{1}{2}\rho L g, \tag{1}$$

donde α es el ángulo desde la horizontal a la línea tangente al puente en los puntos de suspensión, $g = 980 cm/seg^2$, ρ es la densidad del material del puente y A su sección transversal. Supongamos además que $c^2 = T/\rho = Lg/(2\sin(\alpha))$.

Para resolver este problema aplicamos la ley de Newton

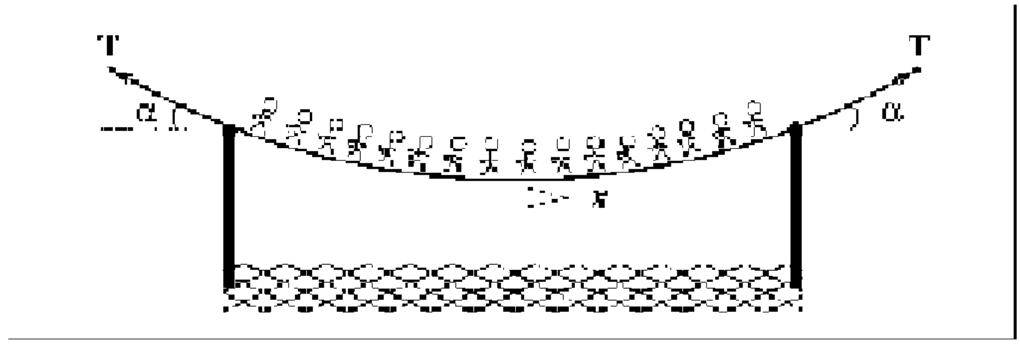

Figura 1: Modelo esquemático de un puente suspendido.

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} \tag{2}$$

a una sección pequeña de puente (simulado como una cuerda). Su masa será $m = \rho A \Delta x$. La aceleración según la dirección vertical es

$$a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u. \tag{3}$$

La fuerza en la dirección vertical será la componente vertical de la tensión más otras fuerzas como el peso y la fricción del aire. La componente vertical de la tensión es

$$T \sin(\theta_2) - T \sin(\theta_1) \cong T(\theta_2 - \theta_1) \cong T(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)), \tag{4}$$

en donde se supuso que los ángulos θ_1 y θ_2 son pequeños. Colocando los resultados de las Ecs.(3) y (4) en la Ec. (2) resulta

$$\rho A \Delta x \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = TA(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x + \Delta x, t)) + \rho A \Delta x f, \tag{5}$$

donde f representa todas las fuerzas por unidad de masa adicionales en la dirección vertical. Podemos simplificar la ec. (5) y escribir

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \frac{T}{\rho} \frac{1}{\Delta x}(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)) + f, \tag{6}$$

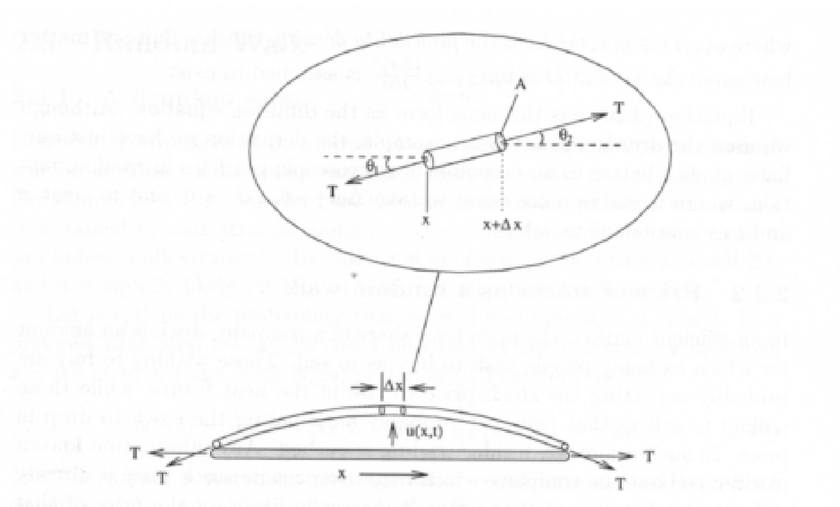

Figura 2: Esquema de las fuerzas que actúan sobre una segmento de cuerda elástica.

y en límite $\Delta x \to 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + f, \tag{7}$$

con $c^2 = T/\rho$.

Volviendo a nuestro problema original, supongamos que $u(x,t)$ es el desplazamiento vertical del puente con respecto a su posición de equilibrio. El problema a resolver será

$$\begin{aligned} Ecuacion\ diferencial: &\quad u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < L,\ t > 0, \\ Condiciones\ en\ los\ extremos: &\quad u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ Condicion\ inicial: &\quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

La aproximación más sencilla para describir la fuerza periódica que ejercerá la columna de soldados marchando sobre el puente es de la forma

$$f(x,t) = a \sin(\frac{2\pi t}{P}) \sin(\frac{\pi x}{L}),\ 0 < x < L, \tag{9}$$

esta fuerza es la diferencia entre la fuerza ejercida por los soldados marchando y su peso estático, por eso puede tomar valores positivos y negativos.

B. Solución del problema.

Como las condiciones de contorno en los extremos son homogéneas usamos una expansión del tipo $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$, es decir proponemos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \\ f(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Para la fuerza propuesta (Ec. (9)), $f_n(t) = 0$ excepto $f_1(t) = a\sin(\frac{2\pi t}{P})$.

Sustituyendo Ec. (10) en Ec. (8) resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n^{''}(t) + c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_n(t)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{11}$$

Por lo tanto resulta

$$\begin{aligned} &T_n^{''}(t) + \omega_n^2 T_n(t) = f_n(t),\ n = 1,2,3,4,5,..., \\ &\omega_n = \frac{cn\pi}{L}. \end{aligned} \tag{12}$$

Es decir que para $n > 1$, la ecuación a resolver es

$$T_n^{''}(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0, \tag{13}$$

mientras que para $n = 1$ debemos resolver

$$T_1^{''}(t) + \omega_n^2 T_1(t) = a\sin(\frac{2\pi t}{P}). \tag{14}$$

La solución de la ecuación (13) es de la forma

$$T_n(t) = A_n\sin(\omega_n t) + B_n\cos(\omega_n t) = \frac{T_n^{'}(0)}{\omega_n}\sin(\omega_n t) + T_n(0)\cos(\omega_n t),\ n = 2,3,4,5,... \tag{15}$$

La ecuación (14) tiene por solución

$$\begin{aligned} T_1(t) &= A_1\sin(\omega_1 t) + B_1\cos(\omega_1 t) + \frac{a\sin(\frac{2\pi t}{P})}{(\frac{2\pi}{P})^2 - \omega_1^2} \\ &= \frac{T_1^{'}(0)}{\omega_1}\sin(\omega_1 t) + T_1(0)\cos(\omega_1 t) + \frac{a}{(\frac{2\pi}{P})^2 - \omega_1^2}\left(\sin(\frac{2\pi t}{P}) - \frac{2\pi}{\omega_1 P}\sin(\omega_1 t)\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Llevando Ecs. (15) y (16) a la Ec. (10), podemos escribir

$$\begin{aligned} u(x,t) \quad &= \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T_n^{'}(0)}{\omega_n}\sin(\omega_n t)+T_n(0)\cos(\omega_n t)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+ \\ & \frac{a}{(\frac{2\pi}{P})^2-\omega_1^2}\left(\sin(\frac{2\pi t}{P})-\frac{2\pi}{\omega_1 P}\sin(\omega_1 t)\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Apliquemos las condiciones iniciales del problema (Ec. (10)) a la solución anterior. Tenemos

$$\begin{aligned} u(x,0) \quad &= 0 = \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\ 0<x<L, \\ u_t(x,0) \quad &= 0 = \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{'}(0)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\ 0<x<L,. \end{aligned} \tag{18}$$

De donde resulta $T_n(0)=0$ y $T_n^{'}(0)=0$ para todo n. Finalmente resulta

$$u(x,t)=\frac{a}{(\frac{2\pi}{P})^2-\omega_1^2}\left(\sin(\frac{2\pi t}{P})-\frac{2\pi}{\omega_1 P}\sin(\omega_1 t)\right). \tag{19}$$

C. Resonancia

La solución anterior (Ec. (19)) incluye la interferencia de una fuerza de frecuencia $2\pi/P$ con la frecuencia funadmental ω_1. Cuando estas dos frecuencias se aproximan una a la otra tanto el numerador como el denominador de la Ec. (19) se aproximan a cero. En el límite para $2\pi/P \to \omega_1$, usando la regla de L'Hopital resulta

$$u(x,t)=a\left(t\frac{\cos(\omega_1 t)}{2\omega_1}-\frac{\sin(\omega_1 t)}{2\omega_1^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{20}$$

Vemos que en este caso la oscilación crece en amplitud de manera lineal con el tiempo (el desplazamiento vertical respecto de la posición de equilibrio $u(x,t)$ crece linealmente como función del tiempo t), lo que llevará probablemente a la ruptura del puente.

La frecuencia fundamental w_1 del puente es (Ec. 12)

$$w_1=\frac{c\pi}{L}=\pi\sqrt{\frac{g}{2L\sin\alpha}}. \tag{21}$$

El periodo P de una fuerza que pueda dar lugar al fenómeno de resonancia con esta frecuencia fundamental es

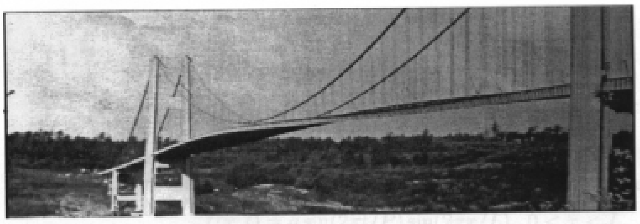

Figura 3: Vista del puente de Tacoma en el instante previo a su caída.

$$P = \frac{2\pi}{\omega_1} = \sqrt{\frac{8L}{g} \sin\alpha}. \tag{22}$$

De la expresión anterior se puede ver que si $\alpha \simeq 90^o$ y el puente tiene 10 metros de largo, $P \simeq 2{,}8$ *seg*. Como el período de la fuerza es generalmente mas pequeño, se puede concluir que en general un puente no se caerá por el paso de una columna de soldados. Si el puente tuviera α mucho menor a 90^o, es decir estuviera practicamente horizontal (ej. $\alpha = 10^o$) result $P \simeq 1{,}1 seg$, lo cual puede conducir al fenómeno de resonancia.