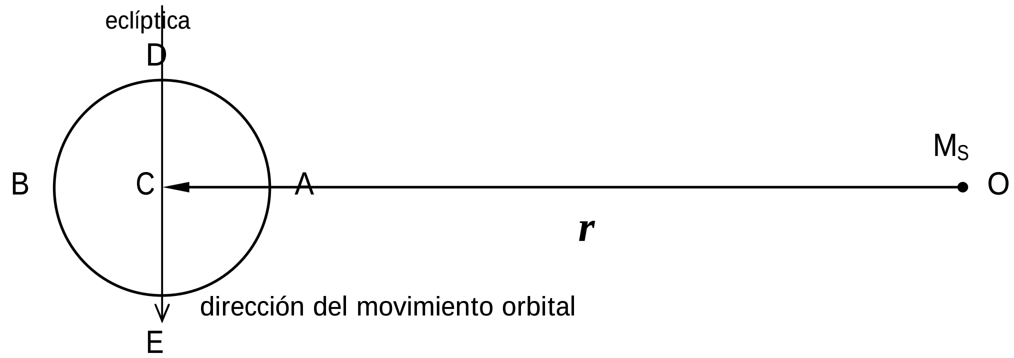
Mareas terrestres de origen solar

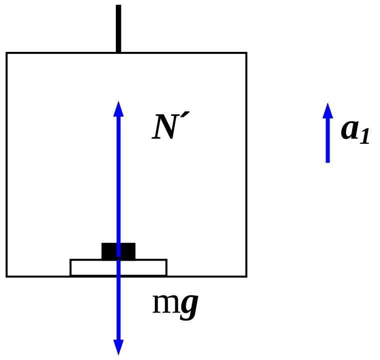
Supongamos que en su movimiento alrededor del Sol la Tierra describe una circunferencia en vez de una elipse y que el centro de masa del sistema Tierra-Sol está en el centro del Sol. La primera aproximación es mejor que el 2% y la segunda mejor que 30 partes por millón. Desde el Sol –en cuyo centro colocamos el origen de nuestro marco de referencia inercial– la Tierra se ve como una partícula de masa M_T=5,98 x 10^{24} kg cuya posición coincide con el centro del planeta. La Tierra, a su vez, también ve al Sol como una partícula con posición en su centro con una masa M_S=1,99 x 10^{30} kg.



Para el centro de la Tierra, punto C, la fuerza centrípeta provista por el campo gravitatorio solar, $|\boldsymbol{F}|=GM_SM_T/r^2$, es igual a la aceleración centrípeta necesaria para que el planeta se mueva con un período de un año en una circunferencia de 150000000 km de radio. A esa distancia del Sol la velocidad tangencial de la Tierra es de unos 30 km/s y la aceleración centrípeta correspondiente es de 5,9 mm/s^2.

Para estudiar el origen de las mareas sobre la superficie terrestre, consideraremos solamente su movimiento alrededor del Sol. Esta es una aproximación, ya que la Tierra gira además sobre su propio eje. Pero las consecuencias de que la Tierra gire sobre sí misma se podrían agregar más adelante a un modelo más elaborado sin invalidar que el movimiento más importante de nuestro planeta es su traslación alrededor del Sol y que ésta es la causa principal de las mareas producidas por el Sol.

Colocaremos ahora balanzas en cuatro puntos sobre la superficie terrestre no ya considerada como una partícula sino como una esfera (la forma de la Tierra es un *geoide* que difiere de una esfera en menos de 0,34%). Debido a que para un observador situado en nuestro marco de referencia inercial la Tierra está acelerada (en caída libre hacia el Sol) las balanzas no medirán lo mismo según el lugar adonde se encuentren. Para entender bien esto recordemos que una balanza dentro de un ascensor que asciende con una aceleración $\boldsymbol{a}_1$, mide $\boldsymbol{N}'$, que surge de pensar que en reposo es N-mg=0, pero que cuando el ascensor está acelerado es $\Sigma\boldsymbol{F}$=m$\boldsymbol{a}$. O sea, N'-mg = ma_1, por lo que ΔN = N' - N = ma_1. Obviamente, si es $\boldsymbol{a_1} \perp \boldsymbol{g}$, N = mg. Asimismo, si el ascensor *desciende* con $\boldsymbol{a}_1$, la ecuación es N'-mg = -ma_1, por lo que $\Delta N = N'$ - N = -ma_1.



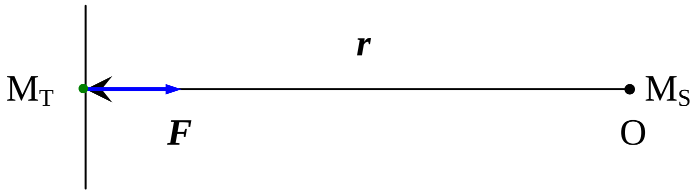
Consideremos ahora el detalle de lo que ocurre en los distintos puntos A, B, C, D y E de nuestro planeta.

Punto C.

En el centro, C, la segunda ley de Newton, $\Sigma\boldsymbol{F}$=M$_T\boldsymbol{a_c}$, toma la expresión:

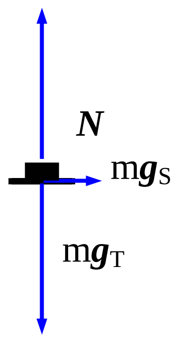
$$-GM_SM_T\hat{\boldsymbol{r}} / r^2 = -M_T\omega^2 r\,\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$GM_S / r^2 = \omega^2 r = g_0 = 5{,}90 \text{ mm/s}^2$$



Puntos D y E.

Los puntos D y E están en la intersección de la eclíptica con la superficie terrestre. Hemos elegido estos puntos porque –despreciando la elevación aparente causada por la atmósfera– tienen al Sol en el horizonte. En esos puntos, la intersección de la vertical del lugar con la superficie terrestre difiere de D y E en una distancia que es de ≈ 31 mm.



Tomemos el punto D y veamos qué fuerzas están ejercidas sobre una masa *m* colocada allí. Debido a que $m\boldsymbol{g}_S = m\omega^2 r\,\hat{\boldsymbol{r}}$ la balanza mide solamente $\boldsymbol{N}$ (dentro de la aproximación que estamos considerando de que $m\boldsymbol{g}_S$ está contenida en el plano horizontal sin ninguna componente en una dirección perpendicular). Esto se obtiene de plantear $N - mg_T = 0$, por lo que $N = mg_T$. Lo mismo ocurre para el punto E.

Puntos A y B.

El punto A es un punto sobre la superficie terrestre que tiene el Sol en su zenit. Se encuentra a una distancia R más cerca del Sol que C. Una balanza que esté colocada allí medirá un peso $\boldsymbol{N'_A}$ que difiere del $\boldsymbol{N_A}$ que mide una balanza no acelerada:

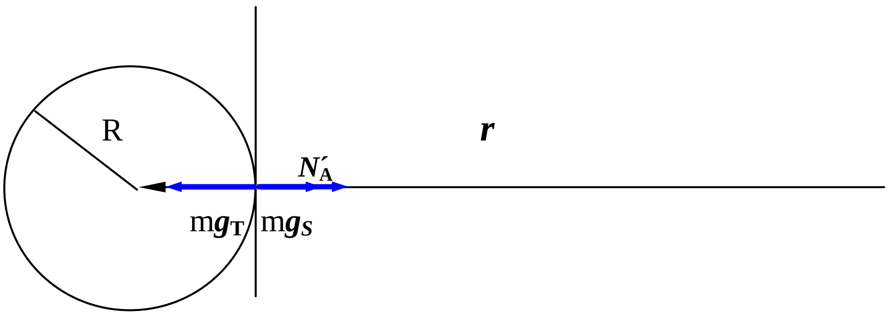
$$\boldsymbol{N'_A} + m\boldsymbol{g_T} + m\boldsymbol{g_S} = m\boldsymbol{a_c}$$

Tomando el sistema de referencia con origen en el centro del Sol es:

$$N'_A\,\hat{\boldsymbol{r}} = mg_T\,\hat{\boldsymbol{r}} - GmM_S\hat{\boldsymbol{r}}\,/(r-R)^2 + m\omega^2 r\,\hat{\boldsymbol{r}}$$

Los módulos de estos vectores son:

$$N'_A = mg_T - GmM_S/(r-R)^2 + m\omega^2 r$$



La diferencia de peso que medirían las balanzas colocadas en el punto A entre una Tierra hipotética que no girase alrededor del Sol y una real que está cayendo hacia el mismo con una aceleración centrípeta $m\omega^2 r$ vale:

$$N'_A - N_A = N'_A - mg_T = -G\,m\,M_S\,/\,(r-R)^2 + m\omega^2 r$$

$$= -m\,G\,M_S\,r^{-2}\,/\,(1 - R/r)^2 + m\omega^2 r$$

$$= -m\,g_0\,/\,(1 - R/r)^2 + m\,g_0$$

$$\approx -m\,g_0\,(1 + 2\,R/r - 1) \approx -2\,m\,g_0\,R/r$$

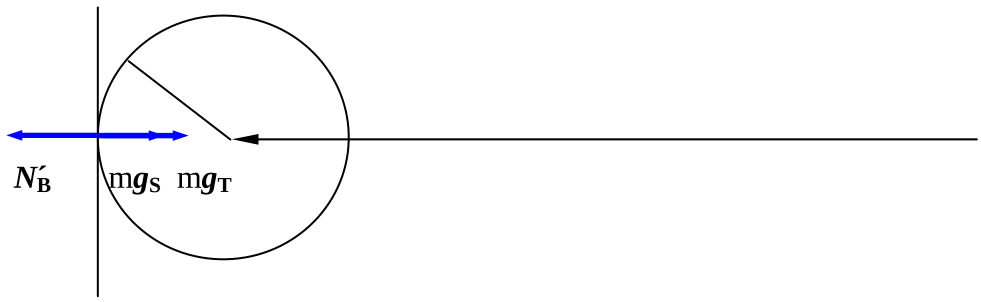
$$= -2mGM_S\,r^{-2}\,(R/r) = -2\,m \times 2{,}5 \times 10^{-7}\ m/s^2$$

Por lo tanto, el cuerpo pesa menos en el punto A por causa de su caída libre hacia el centro del Sol. Para lograr esta aproximación, siendo $R/r = 4{,}2 \times 10^{-5}$ (« 1), hemos despreciado R^2/r^2 (= $1{,}8 \times 10^{-9}$) y hemos tenido en cuenta que es:

$$\frac{1}{(1-2R/r)} = \frac{1+2R/r}{(1-2R/r)\,(1+2R/r)} = \frac{1+2R/r}{1-(2R/r)^2}$$

$$\approx 1+2R/r$$

Finalmente, para el punto B la situación es la siguiente:



$$\boldsymbol{N'_B} + m\boldsymbol{g_T} + m\boldsymbol{g_S} = m\boldsymbol{a_c}$$

$$\boldsymbol{N'_B} = m\boldsymbol{g_T} + GmM_S\hat{\boldsymbol{r}}\,/(r+R)^2 - m\omega^2 r\,\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$N'_B\hat{\boldsymbol{r}} = mg_T\,\hat{\boldsymbol{r}} + GmM_S\hat{\boldsymbol{r}}\,/(r+R)^2 - m\omega^2 r\,\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$N'_B = mg_T + GmM_S/(r+R)^2 - mg_0$$

De modo que la diferencia de peso será ahora:

$$N'_B - N_B = G\,m\,M_S\,/\,(r+R)^2 - m\omega^2 r$$

$$N'_B - N_B = m\,g_0\,/\,(1 + R/r)^2 - mg_0$$

$$\approx m\,g_0(1 - 2R/r) - m\,g_0 \approx -2\,m\,g_0\,R/r$$

que vuelve a ser negativa, por lo que en B también el cuerpo pesa menos por causa del movimiento de revolución de la Tierra alrededor del Sol (para una masa de 1 kg, la diferencia de peso es de 0,5 mN). Esto da origen *simultáneamente* a dos pleamares sobre la superficie del planeta, tal como se observa. Ninguna otra teoría anterior había sido capaz de explicar este hecho. Podemos decir que la teoría de la gravitación universal de Isaac Newton fue una bisagra en la historia del pensamiento humano.