CURSO DE FÍSICA GENERAL

Mecánica y Física molecular

L. Landau, A. Ajiezer, E. Lifshitz

Editorial MIR
Moscú
1973

CAPÍTULO I. MECÁNICA DEL PUNTO

§ 1. Principio de la relatividad del movimiento

El concepto fundamental de *la Mecánica* es el de *movimiento*, es decir, el de desplazamiento de un cuerpo con respecto a los demás cuerpos. Claro está que sin estos cuerpos no podríamos hablar de movimiento, ya que éste siempre es relativo. El movimiento absoluto de un cuerpo, sin referencia a ningún otro cuerpo, carece de sentido.

La relatividad del movimiento está vinculada con la relatividad del propio concepto del espacio. Nosotros no podemos hablar de la posición ocupada en el espacio absoluto, independientemente de los cuerpos que se hallan en él, sino solamente de la posición con respecto a determinados cuerpos.

El conjunto de cuerpos que convencionalmente se consideran inmóviles y que con respecto a los mismos se examina el movimiento de los otros cuerpos, en Física se denomina sistema de referencia o de comparación. El sistema de referencia se puede elegir arbitrariamente de infinitas maneras; con ello, claro está, el movimiento de un cuerpo cualquiera en distintos sistemas de referencia, aparecerá de diferente manera. Si el sistema de referencia está en el mismo cuerpo, éste se hallará en reposo con respecto al sistema, pero se moverá con respecto a otros sistemas, con la particularidad de que en distintos sistemas se moverá de manera diferente, es decir, según distintas trayectorias.

Los diferentes sistemas de referencia son equitativos e igualmente permisibles en el estudio del movimiento de cualquier cuerpo. No obstante, hablando en general, los fenómenos físicos transcurren de distinta manera en los diferentes sistemas de referencia. Por eso está la posibilidad de distinguir los diferentes sistemas de referencia. Es natural elegir el sistema de referencia de manera que los fenómenos de la naturaleza aparezcan en él de la forma más simple.

Sea un cuerpo que se halle tan lejos de los demás, que no sufra ninguna influencia por parte de éstos. Se dice que este cuerpo se *mueve libremente.*

Está claro que, en realidad, las condiciones de movimiento libre pueden tener lugar sólo con mayor o menor grado de exactitud; pero, en principio, puede uno representarse con el alto grado de exactitud que quiera que el cuerpo no interacciona con los otros cuerpos.

El movimiento libre, lo mismo que las demás clases de movimiento, aparece de distinta manera en los diferentes sistemas de referencia. Sin embargo, de elegir como sistema de referencia un sistema ligado a un cuerpo cualquiera que se desplace libremente, los movimientos libres de los demás cuerpos aparecerán en este sistema de una manera muy simple: el movimiento será rectilíneo y uniforme o, de otra manera, a velocidad constante en magnitud y dirección. Esto es en esencia la llamada *ley* (principio) *de la inercia*, descubierta por Galileo. El sistema de referencia ligado al cuerpo que se desplaza libremente se denomina *sistema inercial.* El principio de la inercia también se denomina *primera ley de Newton.*

A primera vista puede parecer que la introducción del sistema inercial, como sistema excepcional por sus propiedades, ofrece la posibilidad de determinar el concepto de espacio absoluto y de reposo absoluto con respecto a este sistema. En realidad esto no es así, ya que hay infinitos sistemas inerciales. Efectivamente, si un sistema se desplaza con respecto al sistema inercial a velocidad constante (en magnitud y dirección), también será inercial.

Hay que subrayar que la existencia de sistemas inerciales no es una necesidad puramente lógica. La afirmación de que existen, en principio, sistemas de referencia con respecto a los cuales el movimiento libre de los cuerpos se verifica rectilínea y uniformemente, es una de las leyes fundamentales de la naturaleza.

Al estudiar el movimiento libre, no podemos, claro está, distinguir diferentes sistemas inerciales. Surge la siguiente pregunta: al estudiar otros fenómenos físicos, ¿se puede distinguir en algo un sistema inercial de otro y, de esta manera, destacar uno de los sistemas considerándolo peculiar? Si esta distinción fuera posible, podríamos decir que existen los conceptos de espacio absoluto y

reposo absoluto con respecto a este sistema de referencia. Pero tal sistema inercial no existe, ya que todos los fenómenos físicos transcurren de la misma manera en los diferentes sistemas inerciales.
Todas las leyes de la naturaleza tienen el mismo aspecto en todos los sistemas inerciales, los cuales, por lo tanto, no se pueden distinguir entre sí y son equivalentes físicamente.
Esta ley, que es una de las principales de la Física, se denomina *principio de la relatividad* del movimiento y priva de todo sentido a los conceptos de espacio absoluto, reposo absoluto y movimiento absoluto.
Como todas las leyes físicas se formulan de la misma manera en todos los sistemas inerciales, mientras que las enunciaciones en los distintos sistemas acelerados (no inerciales) se diferencian, es natural estudiar todos los fenómenos físicos precisamente en los sistemas inerciales. Así lo haremos en adelante, a excepción de los casos en que se especifique particularmente. En realidad, los sistemas de referencia utilizados en los experimentos físicos son inerciales con mayor o menor grado de exactitud. Así, el más corriente es el sistema de referencia relacionado con la esfera terrestre, en la cual vivimos. Este sistema no es inercial debido a la rotación diaria de la Tierra alrededor de su eje y al movimiento de traslación alrededor del Sol. Los distintos puntos de la esfera terrestre efectúan estos movimientos a diferentes, y no constantes, velocidades; por eso, el sistema ligado a la Tierra no es inercial. No obstante, debido a la lentitud relativa de variación de la dirección de las velocidades del movimiento diario de la Tierra alrededor del eje y del movimiento de la Tierra alrededor del Sol, realmente se comete un error muy pequeño, insignificante para una serie de experimentos físicos, al considerar inercial al sistema de referencia «terrestre».
Aunque la diferencia entre el movimiento en el sistema terrestre de referencia y en el sistema inercial es muy pequeño, se puede observar, por ejemplo, con ayuda del péndulo de Foucault, cuyo plano de oscilación se desplaza lentamente con respecto a la superficie terrestre (para más detalles V. el § 31).

§ 2. Velocidad

El estudio de las leyes del movimiento es natural empezarlo con el movimiento de un cuerpo cuyas dimensiones sean suficientemente pequeñas. El movimiento de tal cuerpo se efectúa de la manera más sencilla, ya que podemos no tener en cuenta la rotación del cuerpo ni el desplazamiento relativo de las distintas partes del cuerpo entre sí.
Un cuerpo cuyas dimensiones se puedan despreciar al examinar su movimiento, se denomina *punto material* y es el fundamental objeto de estudio de la Mecánica. Frecuentemente hablaremos del punto material como de una «partícula».
La posibilidad de considerar el movimiento de cierto cuerpo como movimiento del punto material, no sólo viene determinada por las dimensiones absolutas del cuerpo, sino que depende de las condiciones del problema físico planteado. Por ejemplo, al estudiar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, se puede considerar la Tierra como un punto material. Sin embargo, la Tierra no se puede considerar de ninguna de las maneras un punto material al estudiar su rotación diaria alrededor del eje.
La posición del punto material en el espacio se puede determinar completamente con sus tres coordenadas, por ejemplo, con las tres coordenadas cartesianas x, y, z. En este caso se dice que el punto material posee tres *grados de libertad.*
El conjunto de las tres magnitudes x, y, z forma el radio vector r de la partícula, dirigido desde el origen de coordenadas al punto en que se halla la partícula.
El movimiento del punto material lo caracteriza su *velocidad.* En el movimiento uniforme, el valor de la velocidad se determina simplemente como el camino recorrido por la partícula por unidad de tiempo. En el caso general, cuando el movimiento es variado y cambia de dirección, la velocidad de la partícula hay que determinarla como un vector igual al cociente de dividir el vector de desplazamiento infinitamente pequeño $\boldsymbol{ds}$ de la partícula por el correspondiente intervalo de tiempo infinitamente pequeño dt. Por consiguiente, designando con $\boldsymbol{v}$ el vector velocidad, tendremos que

$\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{s} / dt$

La dirección del vector velocidad $\boldsymbol{v}$ coincide con la de $d\boldsymbol{s}$, es decir, en cada momento, la velocidad va dirigida según la tangente a la trayectoria de la partícula en el sentido del movimiento.

En la fig. 1 se representa la trayectoria del movimiento de un punto material y se indican sus radios vectores $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}$ en los momentos t y $t+dt$. Aplicando la regla de la composición (suma) de vectores, puede uno convencerse fácilmente de que el desplazamiento infinitamente pequeño $d\boldsymbol{s}$ del punto es igual a la diferencia de los radios vectores de la partícula en los momentos inicial y final, $d\boldsymbol{s}=d\boldsymbol{r}$. Por eso, la velocidad $\boldsymbol{v}$ se puede representar de la siguiente forma

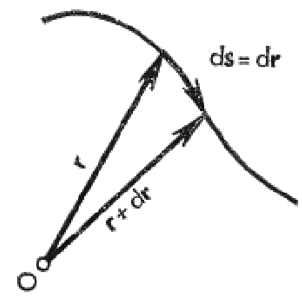


Fig. 1.

$\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r} / dt$

es decir, la velocidad es la derivada del radio vector de la partícula móvil con respecto al tiempo. Como las componentes del radio vector r son las coordenadas x, y, z del punto, las componentes o proyecciones de la velocidad sobre los ejes de coordenadas x, y, z serán iguales a las derivadas

$$v_x = dx / dt, \quad v_y = dy / dt, \quad v_z = dz / dt$$

Además de la posición, la velocidad es la magnitud fundamental que caracteriza el estado del movimiento del punto material. El estado de la partícula viene determinado, por consiguiente, mediante seis magnitudes: tres coordenadas y tres componentes de la velocidad.

Establezcamos la relación entre los valores de las velocidades $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{v}'$ de un mismo punto material en dos sistemas de referencia distintos $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{K}'$. Si en el tiempo dt el punto material se ha desplazado a una distancia $d\boldsymbol{s}$ respecto al sistema $\boldsymbol{K}$ de referencia, y el sistema $\boldsymbol{K}$ se ha desplazado con respecto al sistema $\boldsymbol{K}'$ a la distancia $d\boldsymbol{S}$, de la regla de composición de vectores' tendremos que el desplazamiento del punto material con respecto al sistema $\boldsymbol{K}'$ será $d\boldsymbol{s}' = d\boldsymbol{s}+d\boldsymbol{S}$. Dividiendo ambas partes de esta igualdad por el intervalo dt de tiempo y designando con $\boldsymbol{V}$ la velocidad del sistema $\boldsymbol{K}$ con respecto al $\boldsymbol{K}'$, hallamos que

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{V}.$$

Esta fórmula, que relaciona las velocidades de un mismo punto material en diferentes sistemas de referencia, se denomina *regla de composición de velocidades.*

A primera vista, la regla de composición de velocidades parece completamente evidente. No obstante hay que tener en cuenta que se ha basado en la tácita suposición del transcurso absoluto del tiempo. Efectivamente, hemos considerado que el intervalo de tiempo durante el cual la partícula se desplaza en la magnitud $d\boldsymbol{s}$ en el sistema $\boldsymbol{K}$ es igual al intervalo de tiempo durante el cual la partícula se desplaza en la magnitud $d\boldsymbol{s}'$ en el sistema $\boldsymbol{K}'$. Esta suposición, estrictamente hablando, resulta falsa; pero las consecuencias desprendidas al considerar el tiempo una magnitud no absoluta, empiezan a revelarse solamente cuando las velocidades son muy elevadas, comparables a la de la luz. En particular, a esas velocidades ya no se cumple la regla de composición de velocidades. En adelante examinaremos sólo las velocidades suficientemente pequeñas, cuando la suposición de que el tiempo es absoluto está bien justificada.

La mecánica basada en la suposición del tiempo absoluto se denomina de Newton o clásica. Solamente esta mecánica estudiaremos nosotros. Las leyes fundamentales de esta mecánica las formuló Newton en su libro «Principios matemáticos de filosofía natural», publicado en 1687.

Impulsión

En el movimiento libre del punto material, cuando éste no interacciona con otros cuerpos, su velocidad en los sistemas inerciales permanece invariable. Y al contrario, si los puntos materiales interaccionan entre sí, sus velocidades varían con el tiempo. No obstante, las variaciones de las velocidades de las partículas que interaccionan, no son independientes completamente, sino que se relacionan entre sí. Para aclarar cómo es esta dependencia introducimos el concepto de *sistema cerrado,* comprendiendo con ello el conjunto de puntos materiales que interaccionan entre sí, pero que no lo hacen con los cuerpos que los rodean. Para el sistema cerrado existe una serie de magnitudes relacionadas con las velocidades y que no varían con el tiempo. Estas magnitudes, naturalmente, desempeñan un papel muy importante en la Mecánica.
Una de estas magnitudes invariables es *la impulsión* (el impulso) *total del sistema.* Esta es la suma vectorial de las impulsiones de cada uno de los puntos materiales que integran el sistema cerrado. El vector de impulsión del punto material se relaciona con la velocidad del mismo de manera muy sencilla: es proporcional a esta velocidad. El coeficiente de proporcionalidad es característico para cada punto material constante y se denomina *masa* del punto material. Designando por p el vector de impulsión de la partícula y por m su masa, podemos escribir

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v},$$

donde $\boldsymbol{v}$ es la velocidad de la partícula. La suma de los vectores $\boldsymbol{p}$, extendida a todas las partículas del sistema cerrado, es la impulsión total del sistema:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \cdots\cdots = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots,$$

donde los subíndices representan el número de las diferentes partículas. Esta magnitud no varía con el tiempo:

$$\boldsymbol{P}=\text{const.}$$

Por lo tanto, la impulsión total de un sistema cerrado se conserva constante. Esta aseveración se denomina *ley (principio) de la conservación de la impulsión.* En el § 15 hablaremos del origen de esta ley.
Como la impulsión es un vector, la ley de la conservación de la impulsión se descompone en tres leyes que expresan la constancia con respecto al tiempo de las tres componentes de la impulsión total.
En la ley de la conservación de la impulsión entra una magnitud nueva: la masa de la partícula. Utilizando esta ley se puede determinar la relación de las masas de las partículas. Efectivamente, supongamos que dos puntos materiales chocan entre sí. Designemos sus masas por m_1 y m_2. Sean $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ las velocidades de las partículas antes de la colisión y $\boldsymbol{v}'_1$ y $\boldsymbol{v}'_2$, después de la misma. Entonces, de la ley de la conservación de la impulsión se desprende que

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2= m_1\boldsymbol{v}'_1+ m_2\boldsymbol{v}'_2.$$

Designando por $\Delta\boldsymbol{v}_1$ y $\Delta\boldsymbol{v}_2$ las variaciones de las velocidades de ambas partículas, escribiremos la ecuación de la siguiente manera:

$$m_1\,\Delta\boldsymbol{v}_1 + m_2\,\Delta\boldsymbol{v}_2 = 0,$$

de donde

$\Delta \boldsymbol{v}_2 = -(m_1/m_2)\, \Delta \boldsymbol{v}_1$

Por lo tanto, las variaciones de las velocidades de dos partículas que interaccionan, son inversamente proporcionales a sus masas. Utilizando esta ecuación se puede determinar la relación de las masas en función de la variación de las velocidades de las partículas. Para ello elegiremos arbitrariamente un cuerpo cualquiera, lo consideraremos de masa unidad y las masas de los demás cuerpos las relacionaremos con la de éste. En Física, como tal unidad de masa se toma, generalmente, el gramo (V. el § 8).

§ 4. Movimiento de reacción

La ley de la conservación de la impulsión es una de las leyes fundamentales de la naturaleza y se revela en una serie de fenómenos. En particular, es la base del movimiento de reacción,
Veamos cómo hallar la velocidad de un cohete en función de la variación de su masa. Sea v la velocidad y M la masa del cohete en cierto momento de tiempo t. Supongamos que en este momento empiezan a salir los gases de escape cuya velocidad respecto al cohete es igual a u. Al cabo del intervalo dt, la masa del cohete habrá disminuido y será igual a $M+dM$, donde $-dM$ es la masa del gas que ha salido, y la velocidad habrá aumentado y será igual a $v+dv$. Comparemos ahora las impulsiones del sistema cohete+gases de escape en los momentos t y $t+dt$. Claro está que la impulsión inicial es Mv. La impulsión del cohete en el momento $t+dt$ es $(M+dM)\,(v+dv)$, teniendo en cuenta que la magnitud dM es negativa, y la impulsión del gas de escape es $-dM\,(v-u)$, ya que la velocidad del gas con respecto a la Tierra, evidentemente, es $v-u$ (fig. 2). Según la ley de la conservación de la impulsión debemos igualar las magnitudes de las impulsiones en ambos momentos:

$$Mv = (M+dM)\,(v+dv) - dM\,(v-u),$$

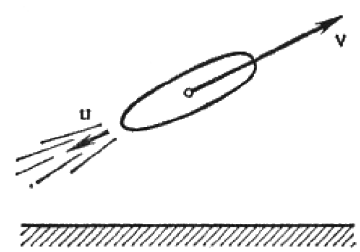


Fig. 2.

de donde, despreciando la magnitud $dM\,dv$, que es infinitamente pequeña de segundo orden, obtenemos que

$$Mdv + udM = 0,$$

o

$$dM/M = -\,dv/u$$

Consideraremos que la velocidad de salida del gas no varía con el tiempo. Entonces, la última ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$d \ln M = -d(v/u)$$

de donde

$$\ln M + (v/u) = \text{const.}$$

El valor de la constante se determina de la condición de que, al iniciar el movimiento el cohete, es decir, cuando $v=O$, la masa del mismo era M_o, por lo tanto:

$$\text{const} = \ln M_o\,.$$

Colocando este valor en la ecuación obtenida, hallamos que

$\ln M + (v/u) = \ln M_o$,

y en definitiva

$v = u \ln (M_o/M)$.

Esta fórmula determina la velocidad del cohete en función de la variación de su masa.

§ 5. Centro de masas

Con la ley de la conservación de la impulsión está relacionada una importante propiedad de la masa: *el principio de conservación de la masa.* Para aclarar el contenido de este principio, examinemos, en un sistema cerrado de partículas, el punto denominado *centro de masas* (centro de inercia) del sistema. Las coordenadas del centro de masas son los valores medios de las coordenadas de las partículas, teniendo en cuenta que la coordenada de cada partícula se considera tantas veces, cuantas unidades de masa haya en la partícula. En otras palabras, si x_1, x_2, ... designan las coordenadas x de las partículas de masas m_1, m_2, ..., la coordenada X del centro de masas viene determinada por la fórmula

$$X = (m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots) / (m_1 + m_2 + \cdots)$$

De manera análoga se pueden escribir las fórmulas para las coordenadas y y z. Todas estas fórmulas se escriben en forma vectorial en una sola expresión para el radio vector $\boldsymbol{R}$ del centro de masas:

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} ,$$

donde $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, ... son los radios vectores de las partículas.
El centro de masas posee una propiedad muy notable y es que se desplaza a velocidad constante, mientras que las distintas partículas que componen el sistema cerrado, pueden moverse a velocidades variables con el tiempo. Efectivamente, examinemos la velocidad de desplazamiento del centro de masas. Esta velocidad es

$$\boldsymbol{V} = \mathrm{d}\boldsymbol{R}/\mathrm{d}t = [m_1(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1/\mathrm{d}t) + m_2(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2/\mathrm{d}t) + \cdots] / (m_1 + m_2 + \cdots)$$

Pero $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1/\mathrm{d}t$ es la velocidad de la primera partícula; $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2/\mathrm{d}t$, la de la segunda, etc. Designando estas velocidades por $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., obtenemos

$$\boldsymbol{V} = (m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots) / (m_1 + m_2 + \cdots)$$

El numerador de esta expresión es la impulsión total del sistema, que hemos designado por $\boldsymbol{P}$. Por eso, definitivamente tenemos

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{P} / M ,$$

donde M es la suma de las masas de todas las partículas: $M = m_1 + m_2 + \ldots$
Como la impulsión total del sistema se conserva, tampoco variará con el tiempo la velocidad del centro de masas.
Escribiendo la fórmula de la manera siguiente

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{V},$$

vemos que la impulsión total del sistema, la velocidad de desplazamiento de su centro de masas y la suma de las masas de todas las partículas que integran el sistema se relacionan de la misma manera que la impulsión, velocidad y masa de una partícula independiente. Nosotros podemos considerar la impulsión total del sistema como la impulsión de un punto material que se halle en el centro de masas del sistema y de masa igual a la suma de las masas de todas las partículas del mismo. La velocidad del centro de masas se puede considerar como la velocidad de desplazamiento del sistema de partículas, considerado como un todo, y la suma, de las masas de las distintas partículas representa la masa de todo el sistema.

De esta manera vemos que la masa de un cuerpo compuesto es igual a la suma de las masas de sus partes. Esta aseveración es muy habitual y puede parecer muy clarividente. No obstante, no es trivial, ni mucho menos, y representa una ley física que es consecuencia de la ley de la conservación de la impulsión.

Como la velocidad del centro de masas de un sistema cerrado de partículas no varía con el tiempo, ligando con su centro de masas un sistema de referencia, obtendremos un sistema inercial de referencia. Este sistema se denomina *sistema del centro de masas.* En este sistema de referencia, la impulsión total del sistema cerrado de partículas, evidentemente, será igual a cero. Al estudiar los fenómenos en un sistema de referencia de esta clase se evitan las complicaciones que aporta el movimiento del sistema de partículas considerado en su totalidad, y se revelan más claramente las propiedades de los procesos internos que se producen en el sistema. Por esta razón, en Física se utiliza frecuentemente el sistema de centro de masas.

§ 6. Aceleración

En el caso general de movimiento de un punto material, la velocidad varía constantemente en dirección y en magnitud. Supongamos que en el intervalo dt la velocidad ha variado en $d\mathbf{v}$. Si referimos esta variación a la unidad de tiempo, obtendremos el vector *aceleración* del punto material, que designaremos mediante $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt ,$$

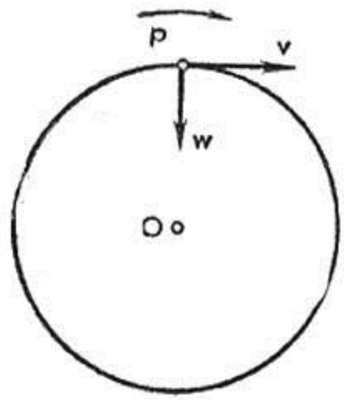
Así tenemos que la aceleración determina la variación de la velocidad de la partícula y es igual a la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

Si la dirección de la velocidad no varía, es decir, si el punto material se desplaza en 1ínea recta, la aceleración estará dirigida según esta recta y evidentemente será

$$w= dv / dt \;.$$

También es fácil determinar la aceleración en el caso en que la velocidad varíe sólo en la dirección, permaneciendo constante en su magnitud. Este caso tiene lugar en el movimiento uniforme de un punto material según una circunferencia.

Sea $\mathbf{v}$ la velocidad de la partícula en un momento determinado (fig. 3). Tracemos el vector $\mathbf{v}$ en un diagrama auxiliar a partir de cierto punto C (fig. 4). Si el movimiento de la partícula es uniforme y según una circunferencia, el extremo del vector $\mathbf{v}$ (punto A) también se desplazará uniformemente según la circunferencia de radio v, igual al valor absoluto de la velocidad. Está claro que la velocidad de desplazamiento del punto A será la aceleración de la partícula P, ya que el desplazamiento del punto A en el tiempo dt es igual a $d\mathbf{v}$, y, por consiguiente, la velocidad del punto A es igual a $d\mathbf{v}/dt$. Esta velocidad, siendo tangente a la circunferencia C, es perpendicular a $\boldsymbol{v}$. En la figura se designa mediante la letra $\boldsymbol{w}$. Si construimos el vector $\boldsymbol{w}$ en el punto *P*, evidentemente estará dirigido hacia el centro de la circunferencia *O*. Así, la aceleración de un punto material que se desplaza uniformemente según una circunferencia, va dirigida hacia el centro de la circunferencia, es decir, es perpendicular a la velocidad.



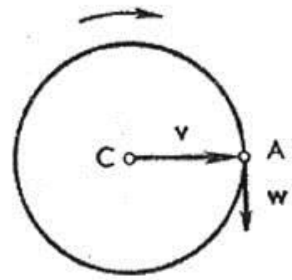


Fig. 3. Fig. 4.

Determinemos la magnitud de la aceleración $\boldsymbol{w}$. Para ello hay que hallar la velocidad del punto *A*, que se desplaza según una circunferencia de radio *v*. En el tiempo *T*, en que el punto *P* efectúa una rotación completa según la circunferencia *O*, el punto *A* lo hará según la circunferencia *C*, es decir, recorrerá un camino igual a $2\pi v$. Por eso, la velocidad del punto *A*, igual a *w*, será

$$w = 2\pi v / T.$$

Colocando aquí el valor del período $T=2\pi r/v$, donde *r* es el radio de la trayectoria de la partícula *P*, obtenemos definitivamente que

$$w = v^2 / r .$$

Por lo tanto, si la velocidad sólo varía en magnitud, la dirección de la aceleración coincide con la de la velocidad; si la velocidad varía solamente de dirección, los vectores de la velocidad y de la aceleración son perpendiculares entre sí.

En el caso general, cuando la velocidad varía en magnitud y en dirección, la aceleración posee dos componentes: una según la dirección de la velocidad y la otra, perpendicular a la misma. La primera se denomina componente *tangencial* y es igual a la derivada de la magnitud de la velocidad con respecto al tiempo:

$$w_t = dv / dt \,.$$

La segunda componente de la aceleración, w_n, se denomina *normal*. Es proporcional al cuadrado de la velocidad de la partícula e inversamente proporcional al radio de curvatura de la trayectoria en el punto considerado.

§ 7. Fuerza

Si el punto material efectúa un movimiento libre, o sea, no interacciona con los cuerpos que le rodean, conservará su impulsión. Si, por el contrario, la partícula interacciona con los cuerpos que la rodean, su impulsión variará con el tiempo. Por lo tanto podemos considerar la variación de la impulsión del punto material como una medida de la influencia que ejercen sobre él los cuerpos que lo rodean. Cuanto mayor sea esta variación (por unidad de tiempo), más intensa será la influencia. Por eso, para determinar esta influencia es natural considerar la derivada del vector de la impulsión del punto material con respecto al tiempo. Esta derivada se denomina *fuerza,* y es la que actúa sobre el punto material.

Esta definición caracteriza un aspecto de la interacción, a saber, el grado de «reacción» del punto material , ante la acción que ejercen sobre el mismo los cuerpos que lo rodean. Pero, por otro lado, al estudiar la interacción del punto material con los cuerpos que lo rodean, se puede relacionar la fuerza de esta interacción con las magnitudes que caracterizan el estado del punto material y el de los cuerpos que lo rodean.

Las fuerzas de interacción entre los puntos materiales (en la Mecánica clásica) dependen sólo de su posición. En otras palabras, las fuerzas que actúan entre las partículas, dependen solamente de la distancia entre éstas, pero no de las velocidades de las mismas.

El carácter de dependencia de las fuerzas con respecto a la distancia entre las partículas, se puede establecer, en muchos casos, partiendo del estudio de los fenómenos físicos que son la base de la interacción entre los puntos materiales.

Designemos por $\boldsymbol{F}$ la fuerza que actúa sobre el punto material considerado. Esta fuerza dependerá de las coordenadas del punto material y, además, de las magnitudes que caracterizan las propiedades y la posición de los cuerpos que lo rodean. Entonces podemos escribir la igualdad de las dos expresiones de la fuerza: la variación de la impulsión del punto material $\boldsymbol{p}$ por unidad de tiempo y $\boldsymbol{F}$, de donde

$$d\mathbf{p} / dt = \boldsymbol{F} .$$

Esta igualdad se denomina *ecuación del movimiento* del punto material.

Como $\boldsymbol{p}=m\mathbf{v}$, la ecuación del movimiento del punto material se puede escribir también de la siguiente manera:

$$md\mathbf{v}/dt = \boldsymbol{F} .$$

De esta manera, la fuerza que actúa sobre un punto material, es igual al producto de la aceleración del punto material por su masa. Esta aseveración es el contenido de la *segunda ley de la mecánica de Newton.* No obstante, hay que subrayar que esta ley adquiere sentido concreto sólo después de establecer la clase de $\boldsymbol{F}$ en función de las coordenadas de la partícula. En este caso, es decir, si se conoce la clase de función de $\boldsymbol{F}$**,** la ecuación del movimiento permite, en principio, determinar la dependencia de la velocidad y de las coordenadas del punto material respecto del tiempo.

En otras palabras, nos permite determinar la trayectoria de su movimiento. En este caso, además de la clase de la función $\boldsymbol{F}$**,** es decir, de la ley de interacción de la partícula con los cuerpos que la rodean, se deben conocer las denominadas *condiciones iniciales:* posición y velocidad de la partícula en determinado momento tomado en calidad de inicial. Como la ecuación del movimiento determina el incremento de la velocidad de la partícula por cada, intervalo de tiempo dt, $d\mathbf{v}=(F/m)dt$, y como por la velocidad se puede determinar la variación de la posición de la partícula en el espacio, $d\mathbf{r}=v\ dt$, está claro que el conocimiento de la posición y velocidad, iniciales de la partícula son suficientes para determinar por completo su movimiento ulterior. Precisamente en esto está el sentido de la afirmación hecha en el § 2 de que el estado mecánico de la partícula viene determinado por las coordenadas y por la velocidad.

La ecuación del movimiento es una ecuación vectorial. Por eso se puede escribir en forma de tres ecuaciones que relacionan las proyecciones de la aceleración y de la fuerza sobre los ejes de coordenadas:

$m\,(dv_x/dt) = F_x$, $m\,(dv_y/dt) = F_y$, $m\,(dv_z/dt) = F_z$.

Volvamos al sistema cerrado de puntos materiales. Como sabemos, la suma de las impulsiones de estos puntos se conserva constante:

$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}_2 + \cdots = \text{const},$

donde $\boldsymbol{p}_i$ es la impulsión del punto material i. Diferenciemos esta ecuación en función del tiempo:

$d\boldsymbol{p}_1/dt + d\boldsymbol{p}_2/dt + \cdots = 0$.

Observando que

$d\boldsymbol{p}_i/dt = \boldsymbol{F}_i$,

donde $\boldsymbol{F}_i$ es la fuerza que actúa sobre el punto i, obtenemos que

$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots = 0.$

De esta manera, la suma de todas las fuerzas de un sistema cerrado es igual a cero.
En particular, si el sistema cerrado posee solamente dos cuerpos, la fuerza con que el primer cuerpo actúa sobre el segundo, debe ser igual en magnitud y de sentido contrario a la fuerza con que el segundo cuerpo actúa sobre el primero. Esta aseveración se denomina *principio de la igualdad de la acción y de la reacción* (o *tercera ley de Newton).* Como en el caso considerado solamente hay una dirección elegida, la de la recta que une los cuerpos (puntos materiales), las fuerzas $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$ estarán dirigidas según esta recta (fig. 5; M_1 y M_2 designan los dos puntos materiales).

Fig. 5