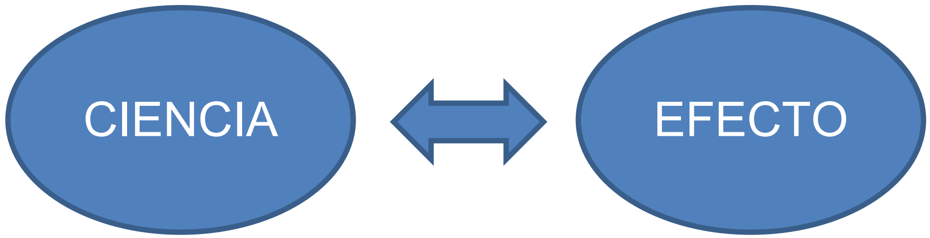
caos

CIENCIA

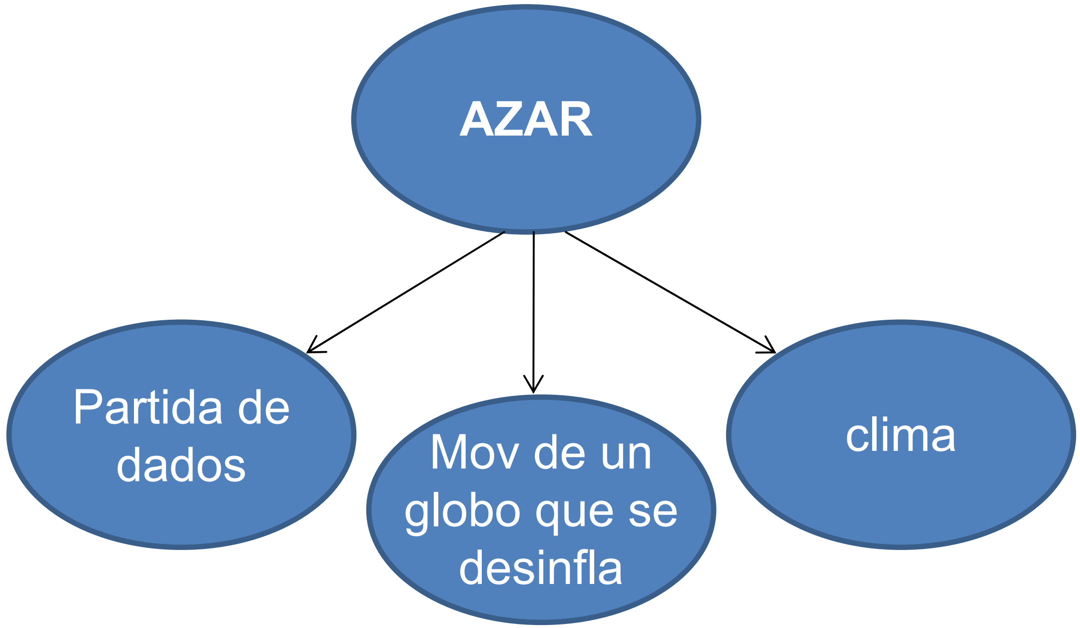


Predicción de:

- eclipses
- períodos de cometas
- mareas
- Etc.

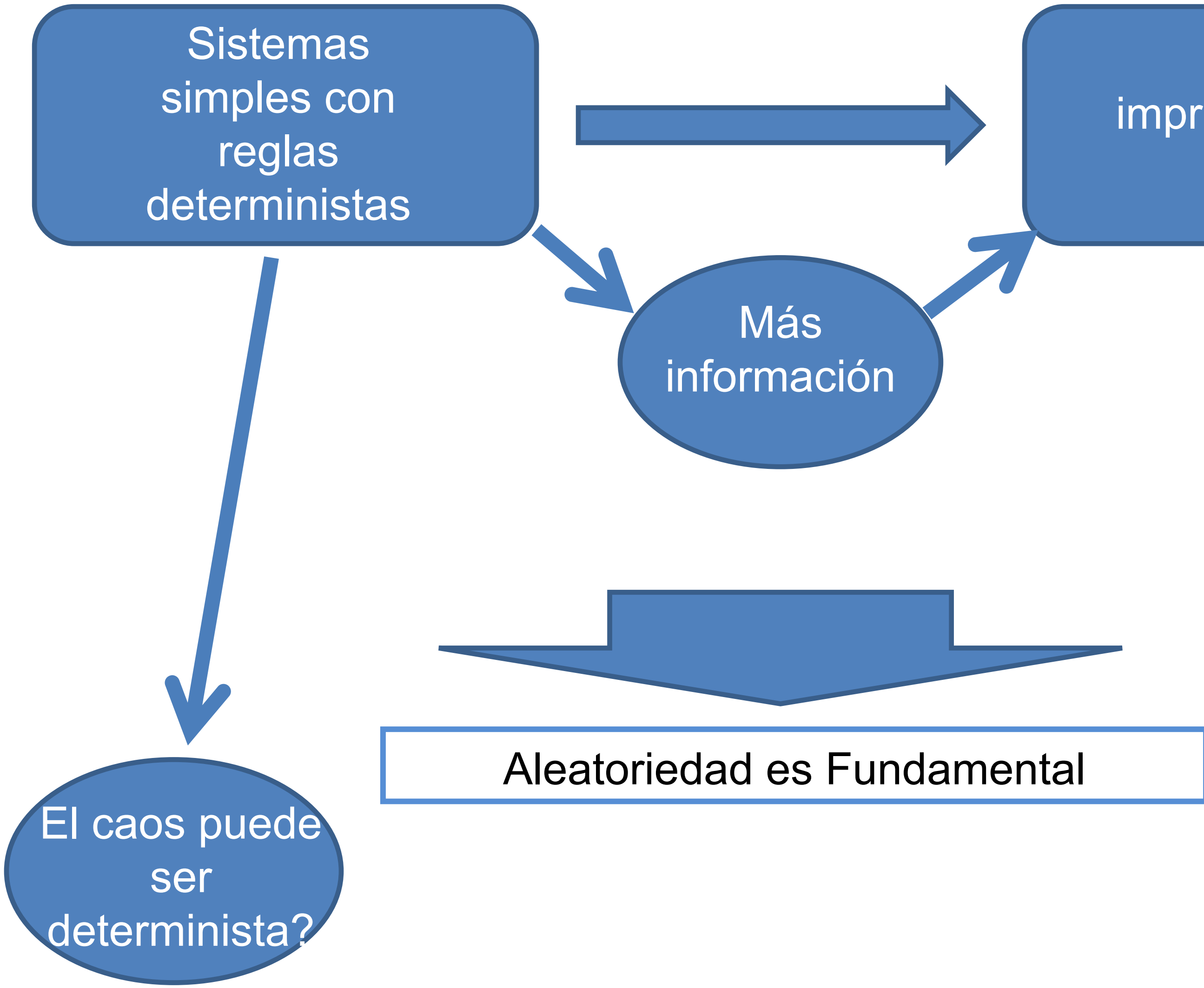
MAREAS (predecibles)	CLIMA (predecible?)
Tablas para varios años	Horizonte de predectibilidad?
Variables.	Variables.
Temperatura Salinidad Presión Ondas superficiales Sol y Luna Forma costera profundidad	Temperatura Humedad Presión Viento Nubosidad

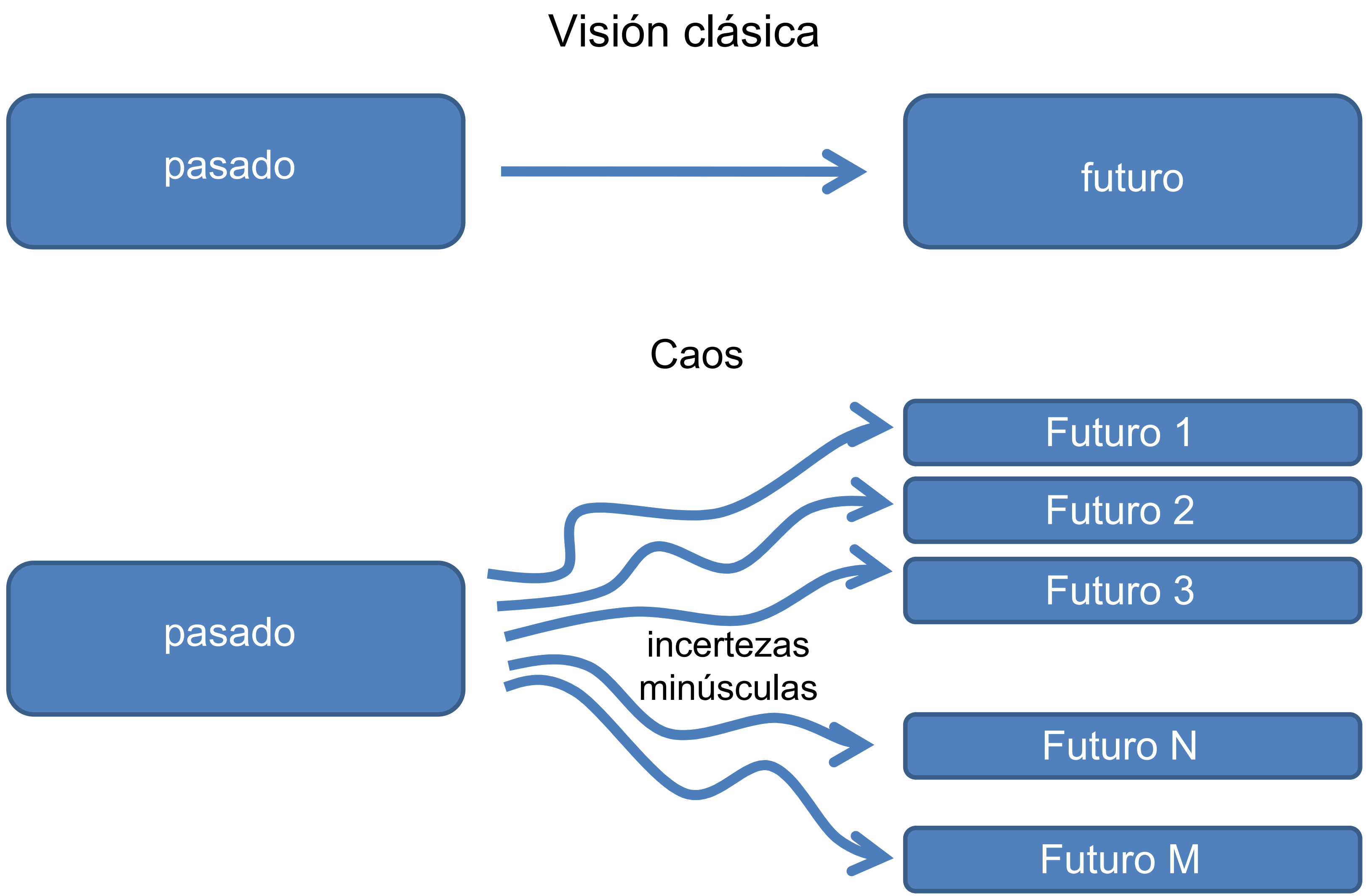
Para describir lo que no entendemos introducimos el azar



Paradigma clásico

Teoría del Caos
(Caos = impredectibilidad)





Caos – Horizonte de predictabilidad

Reducción histórica del universo del Caos al Cosmos

Más leyes físicas verificadas → Menos caos

Galileo
Newton
Leibniz
Maxwell…

↓

Futuro sin caos?

Demonio de Laplace

Una conciencia capaz de conocer las posiciones y velocidades exactas de todos los objetos del universo en un instante dado, así como las fuerzas que los afectan, puede calcular cualquier evento pasado o futuro

Atentados al Determinismo

Cuando conocemos el presente → Podemos calcular el futuro

premisa
falsa

Heisemberg

No podemos conocer todos
los detalles del presente
(principio de incerteza)

El Determinismo no se rinde

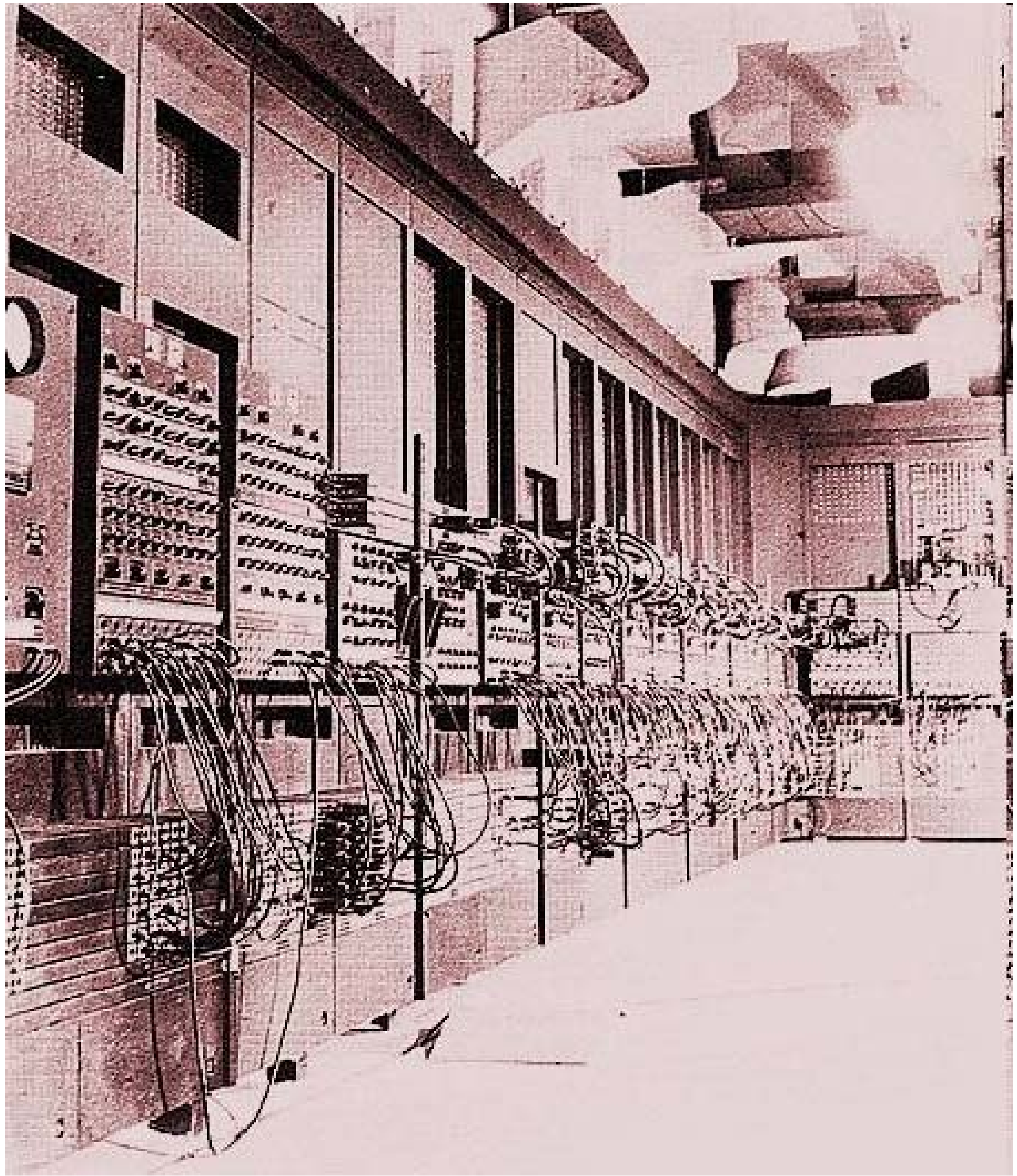
Lewis F. Richardson, 1922

"Wheather Prediction by Numerical Process"

ENIAC, 1940

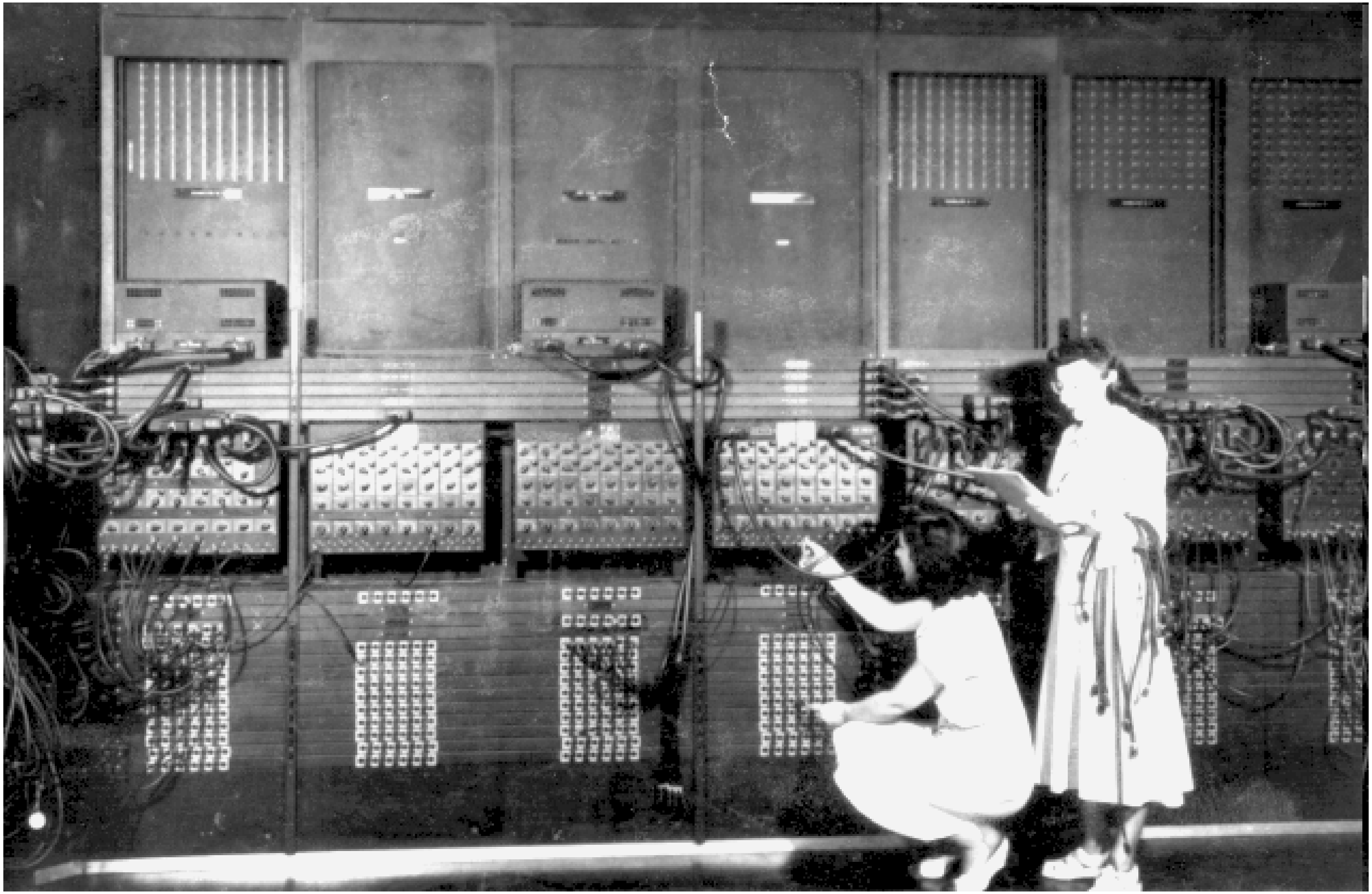
Centros meteorológicos

ENIAC



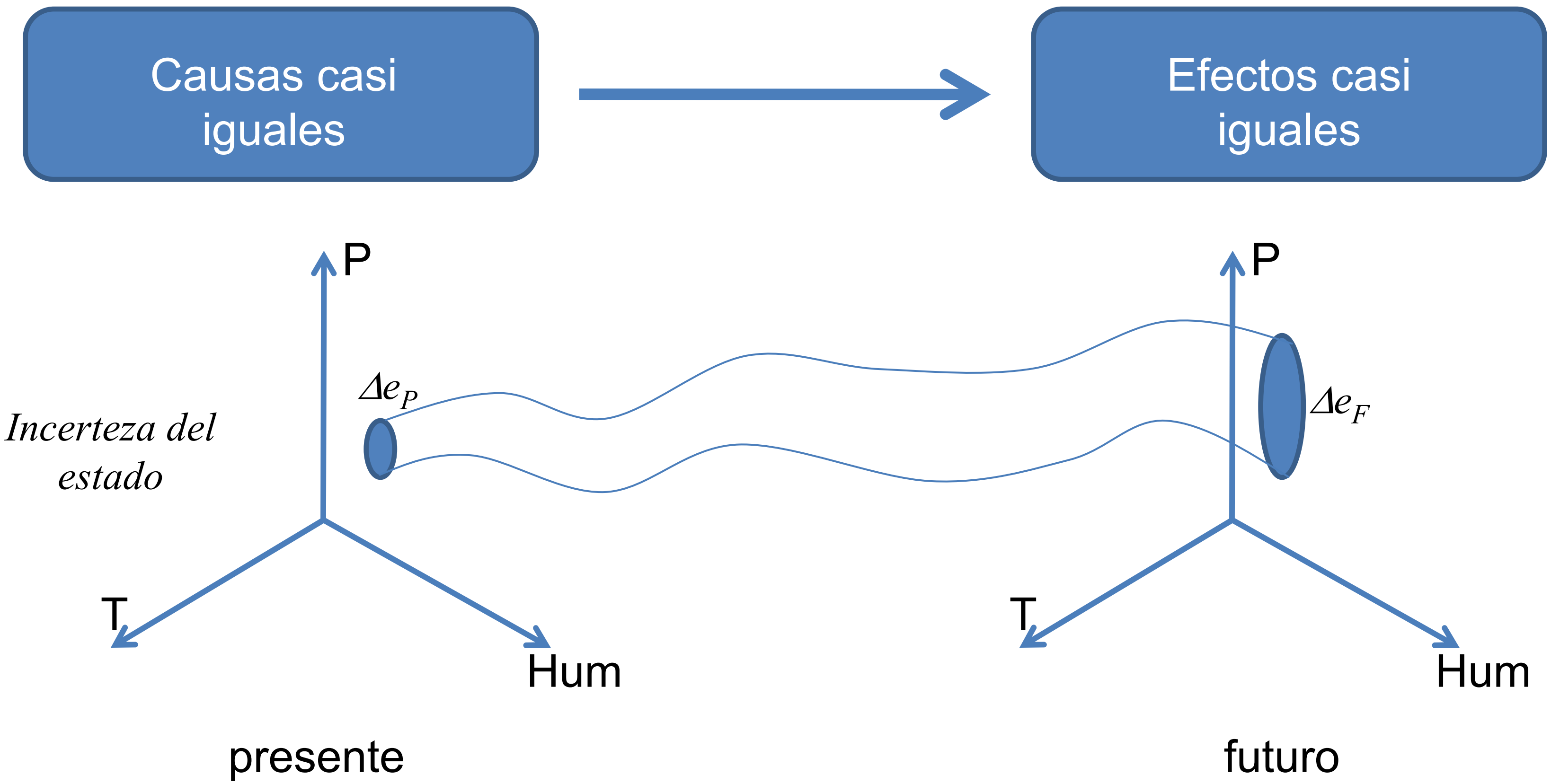
Electronic Numerical Integrator And Computer

ENIAC



El Determinismo no se rinde

Admisión de las incertezas, pero…



Es un caso frecuente, ¿o no?

Leyes físicas

MegaCálculos en ordenadores

Misiones espaciales

Pero no es un principio universal

Teoría del Caos

La **teoría del Caos** es un campo de estudio en matemática, física y filosofía que estudia el comportamiento de sistemas dinámicos que son altamente sensibles a las condiciones iniciales. Esta sensibilidad es popularmente llamada efecto mariposa. Pequeñas diferencias en las condiciones iniciales (tales como aquellas debidas al redondeo de errores en el cálculo numérico) conducen a resultados ampliamente divergentes para sistemas caóticos, haciendo las predicciones de largo plazo imposibles en general. Ello ocurre aunque los sistemas sean deterministas, es decir que su comportamiento futuro esté determinado completamente por sus condiciones iniciales, sin elementos aleatorios involucrados. En otras palabras, la naturaleza determinista de estos sistemas no los hace predecibles. Este comportamiento se conoce como caos determinista, o simplemente *caos*.

Wikipedia

Fractales

Un **fractal** es un objeto semigeométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. El término fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975 y deriva del Latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado. Muchas estructuras naturales son de tipo fractal.

A un objeto geométrico fractal se le atribuyen las siguientes características:

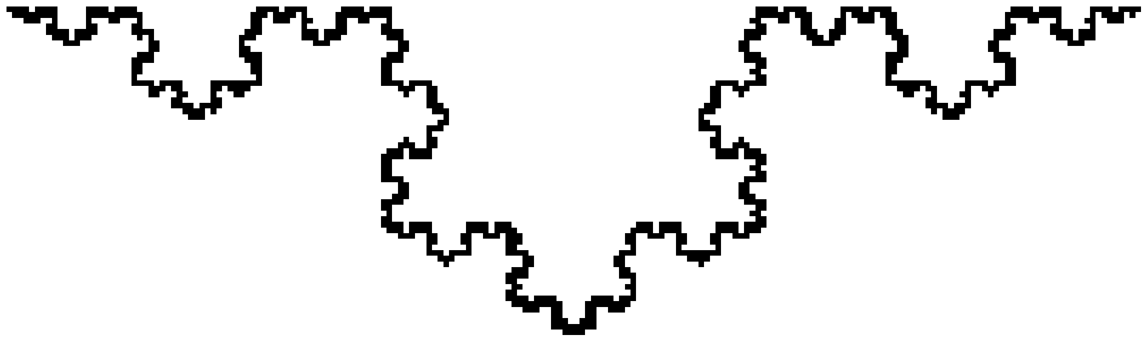
•Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.
•Posee detalle a cualquier escala de observación.
•Es autosimilar (exacta, aproximada o estadísticamente).
•Su dimensión (de Hausdorff-Besicovitch) es estrictamente mayor que su dimensión topológica.
•Se define mediante un simple algoritmo recursivo.

'Complexity of structure is a result of complicated interwoven processes'

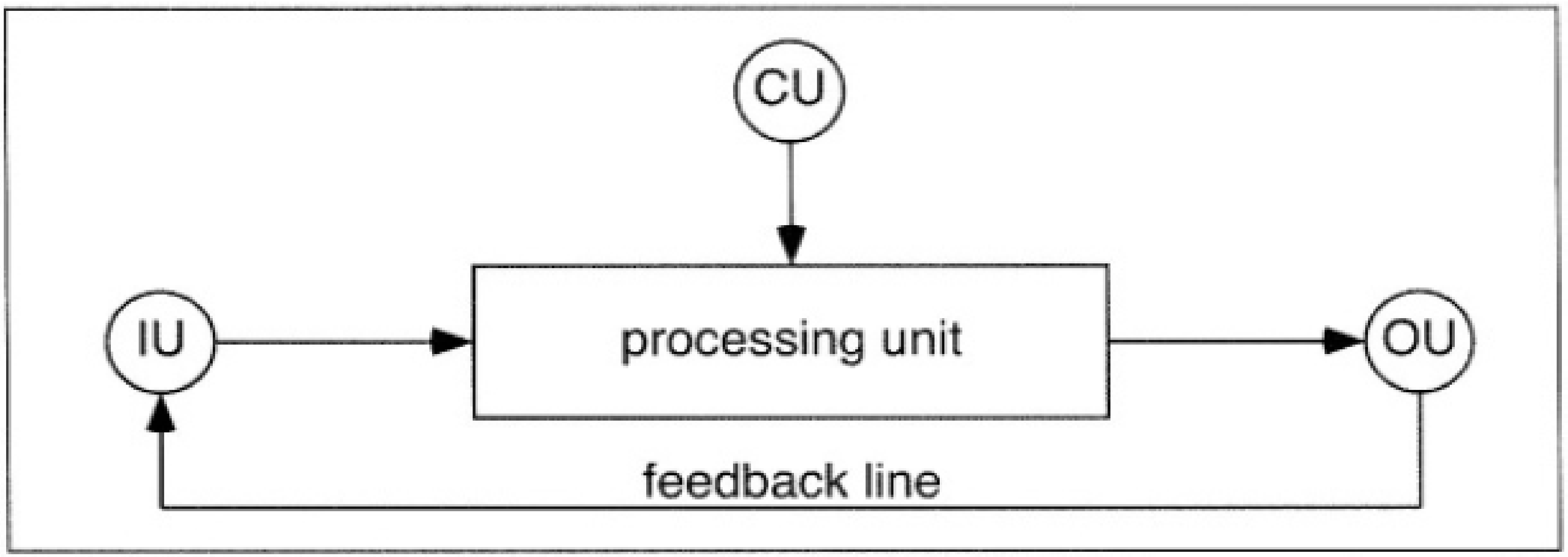
Paradigma

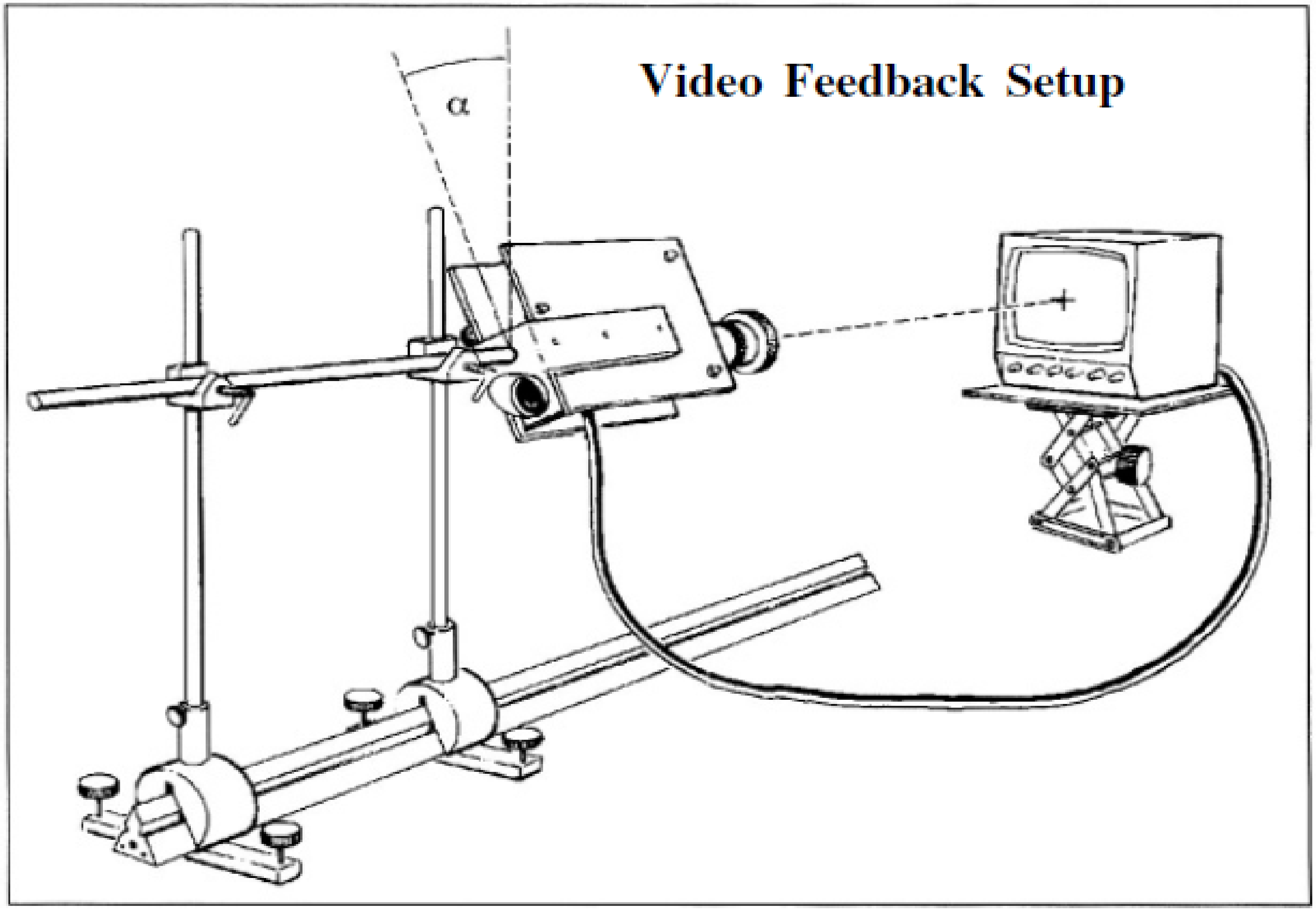
Este enunciado NO tiene validez GENERAL

Un proceso simple puede ser responsable de un patrón muy complejo

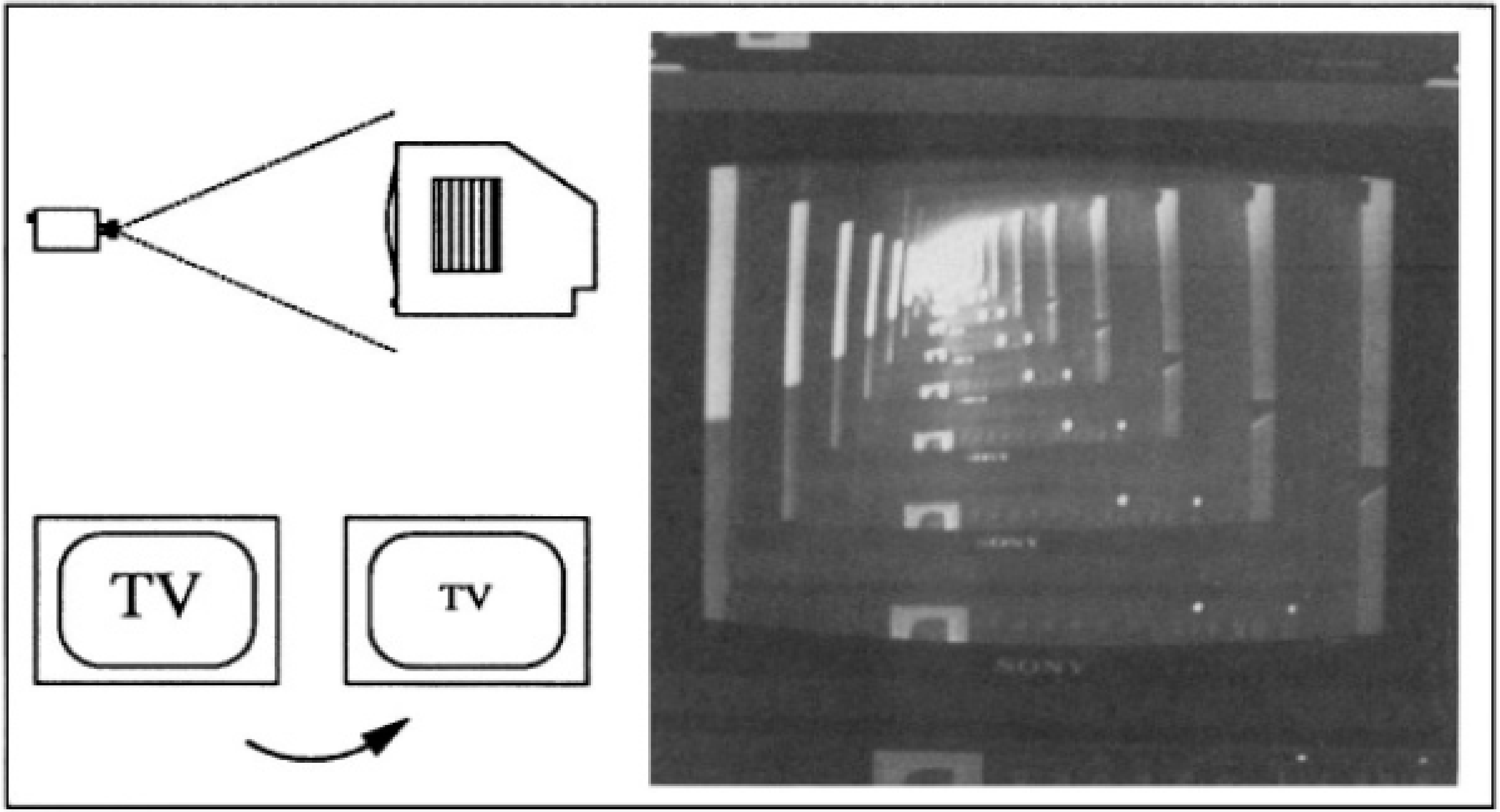


Procesos realimentados



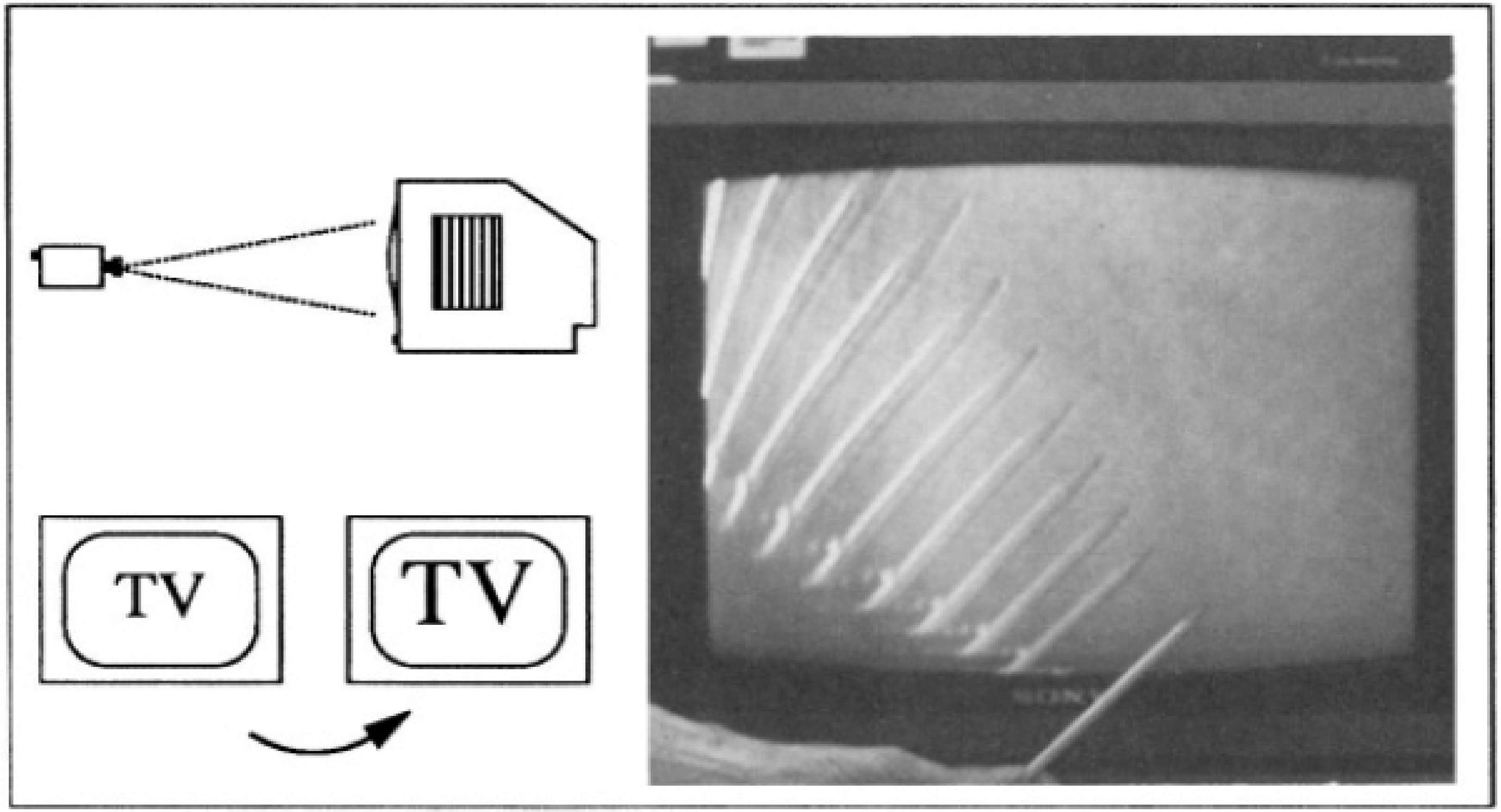

Video Feedback Setup
α

Monitor Inside Monitor Inside . . .



1:m<1 cámara – monitor sin rotar

Zoom into a Zoom into ...

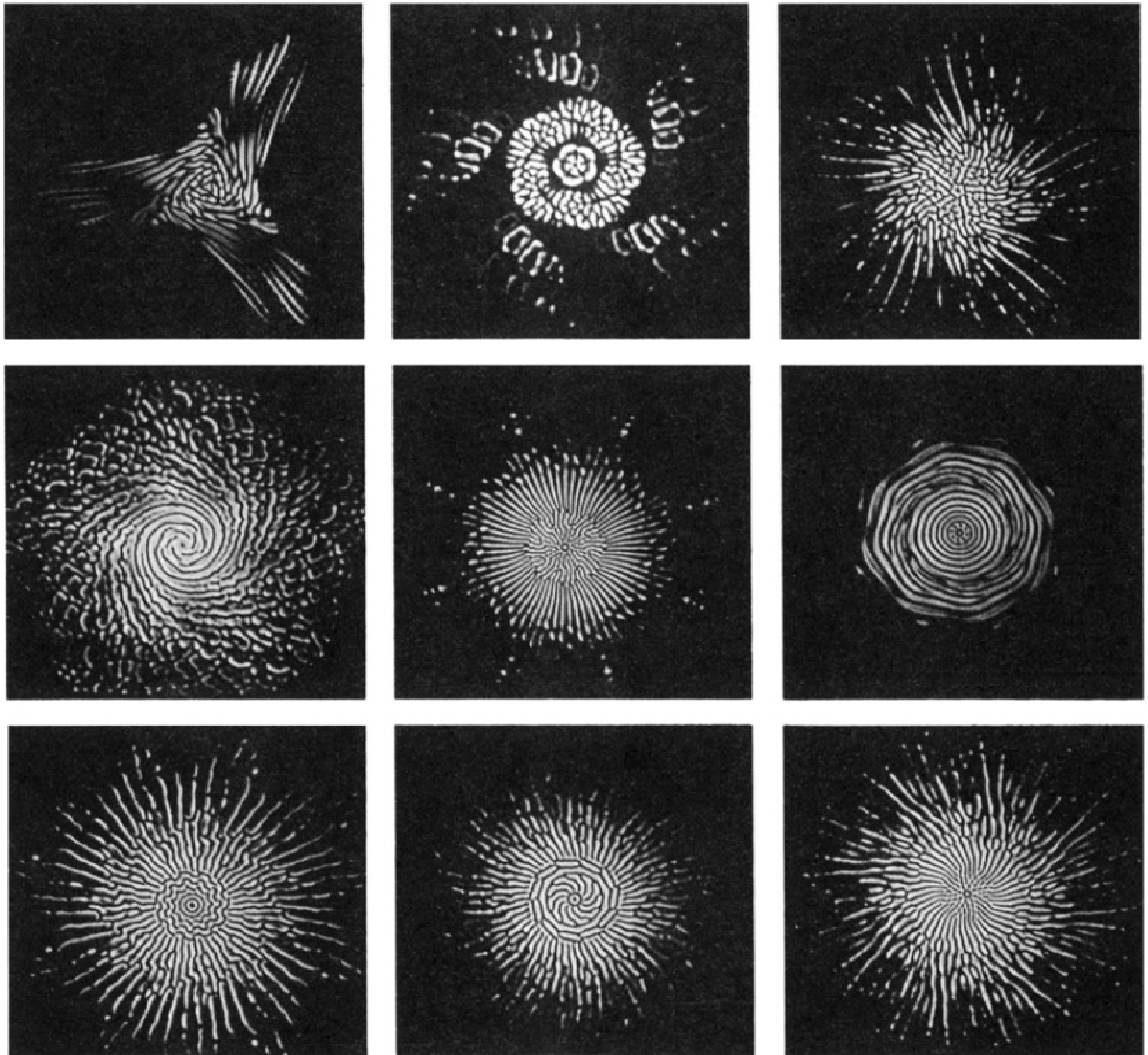


1:m>1 cámara – monitor sin rotar

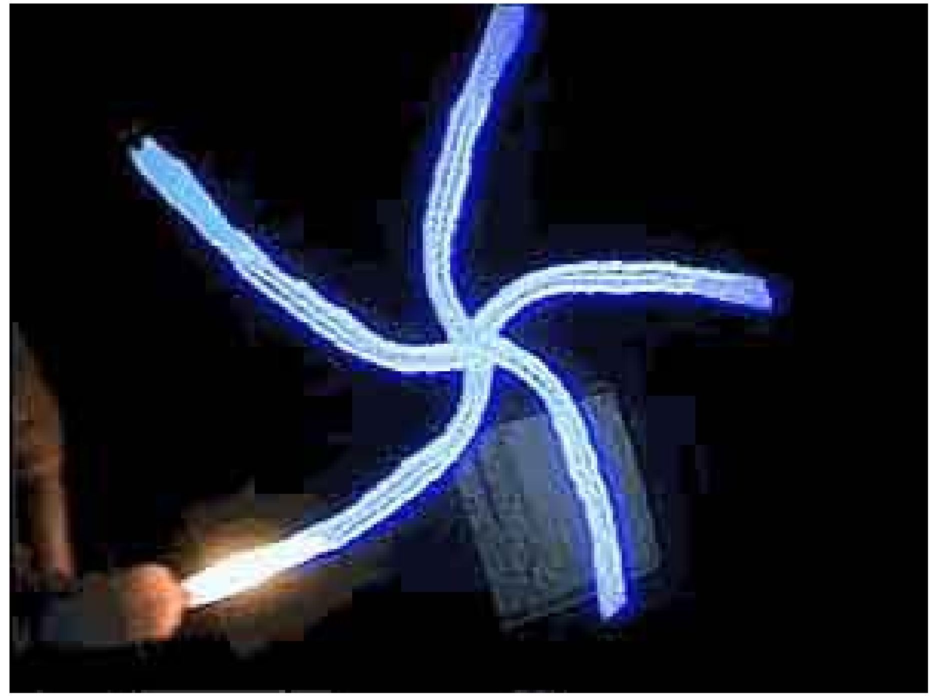
El proceso de retroalimentación puede describirse como una reducción de la imagen hacia un punto interior de la pantalla. Si acercamos la cámara lo suficiente como para que desde su visor sólo observemos parte de la pantalla tendremos un efecto contrario: la imagen se expandirá. Para conseguir imágenes que resultan hipnóticas atenuaremos el brillo del televisor y aumentaremos el contraste. Tras apagar la luz de la habitación, ajustaremos el zoom de la cámara de modo que la pantalla del televisor quede perfectamente encuadrada sin que aparezca el marco del televisor. Es decir nos encontramos en la región ni demasiado lejos para que la imagen se contraiga, ni demasiado cerca para que la imagen se expanda. En este sencillo sistema se pueden modificar muchas variables como el zoom, el foco o el ángulo con que encaramos la pantalla del televisor.

1. La pantalla se vuelve totalmente blanca o se fija una mancha de luz estable. Este resultado es, en lenguaje de los sistemas dinámicos, un punto fijo.
2. Aparece una mancha de luz pulsante (estado estacionario periódico).
3. Asistimos a una frenética aparición y desaparición de manchas de luz sin orden ni concierto (caos determinista).
4. Nuestra pantalla exhibe un patrón organizado o complejo de manchas, de reminiscencias orgánicas, que parecen crecer, decrecer y evolucionar (dinámica compleja o auto-organizada).

1:1 cámara – monitor rotados



1:1 cámara – monitor rotados

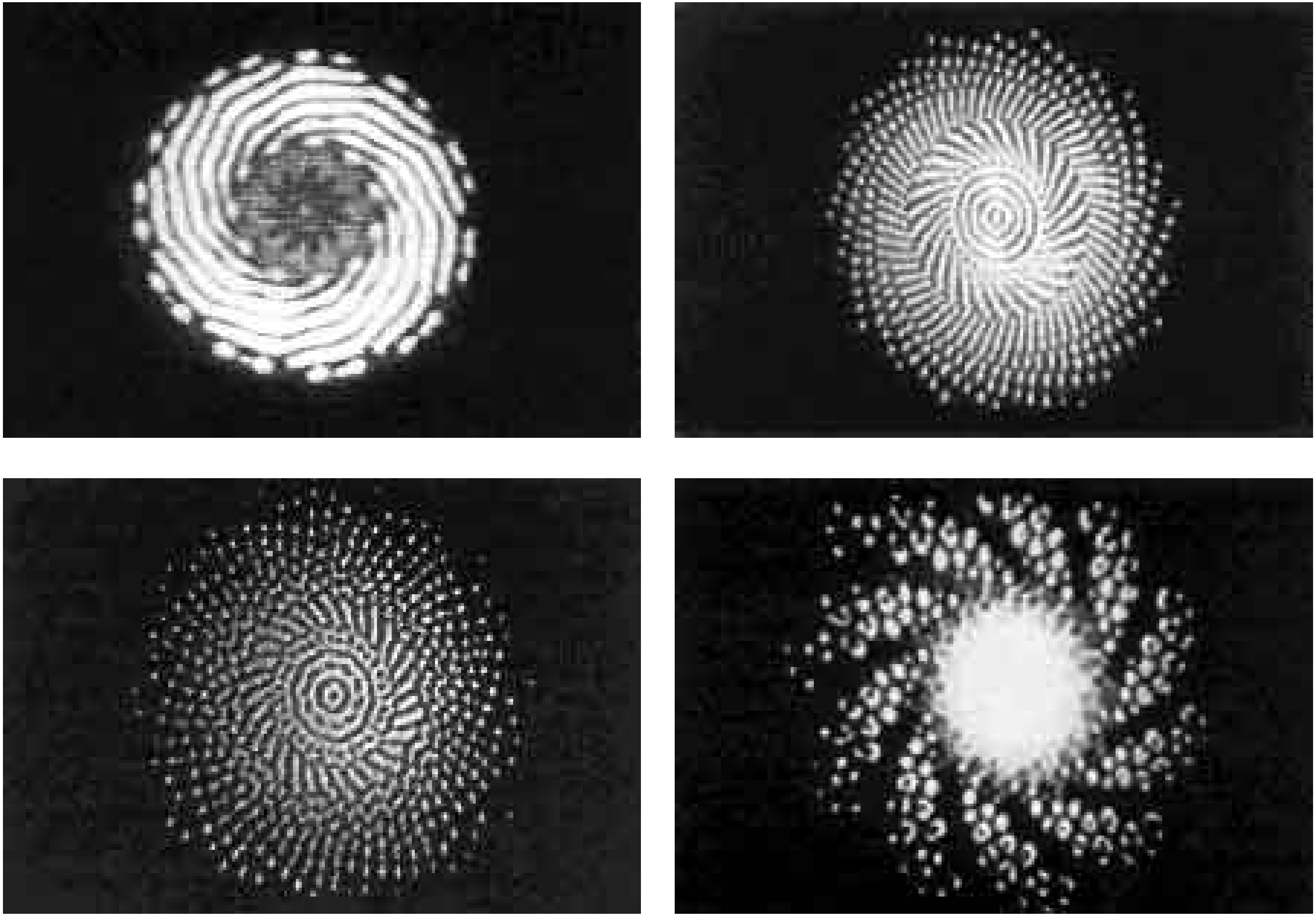


[Space-time dynamics in video feedback](#)

Pages 229-245

James P. Crutchfield

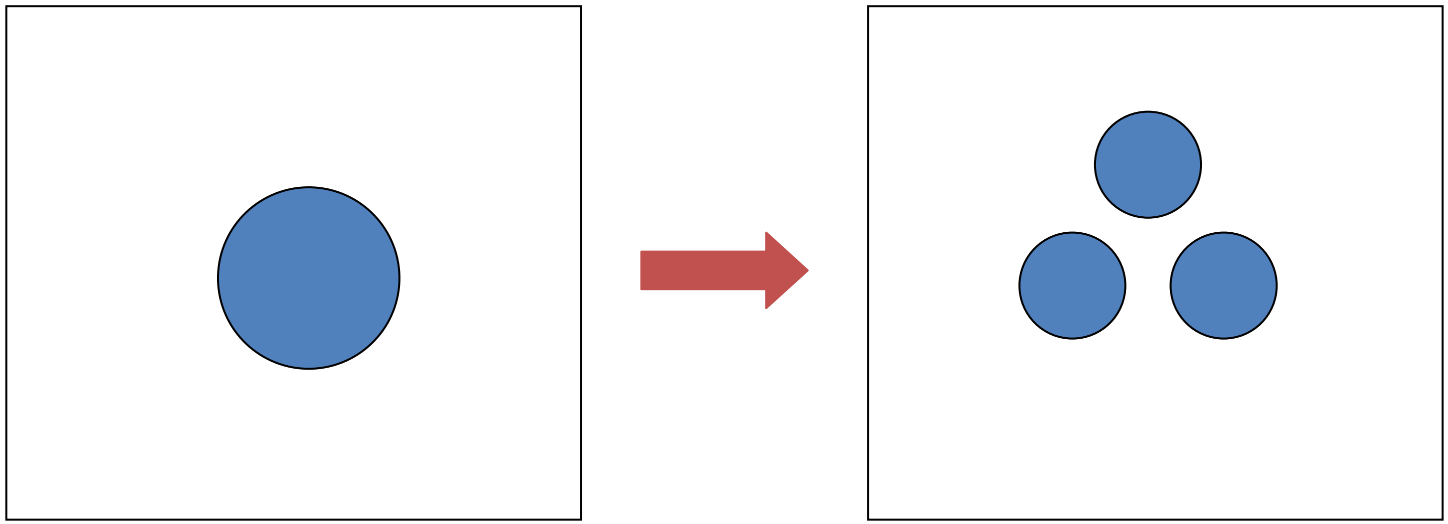
1:1 cámara – monitor rotados



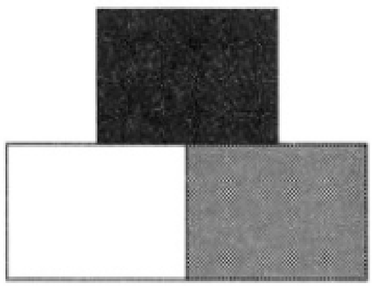
Reducción realimentada

Gauss

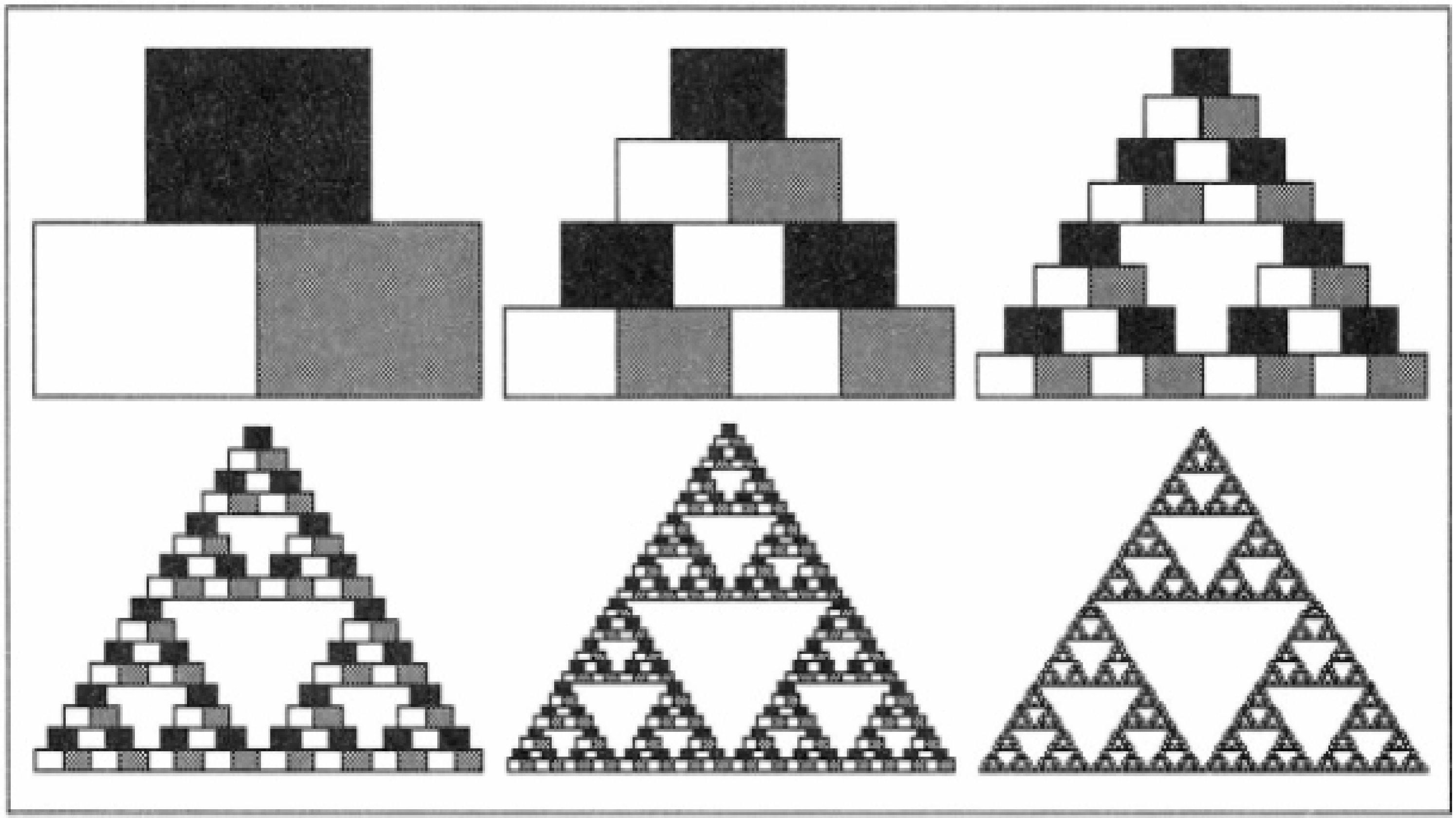
Un caso no trivial



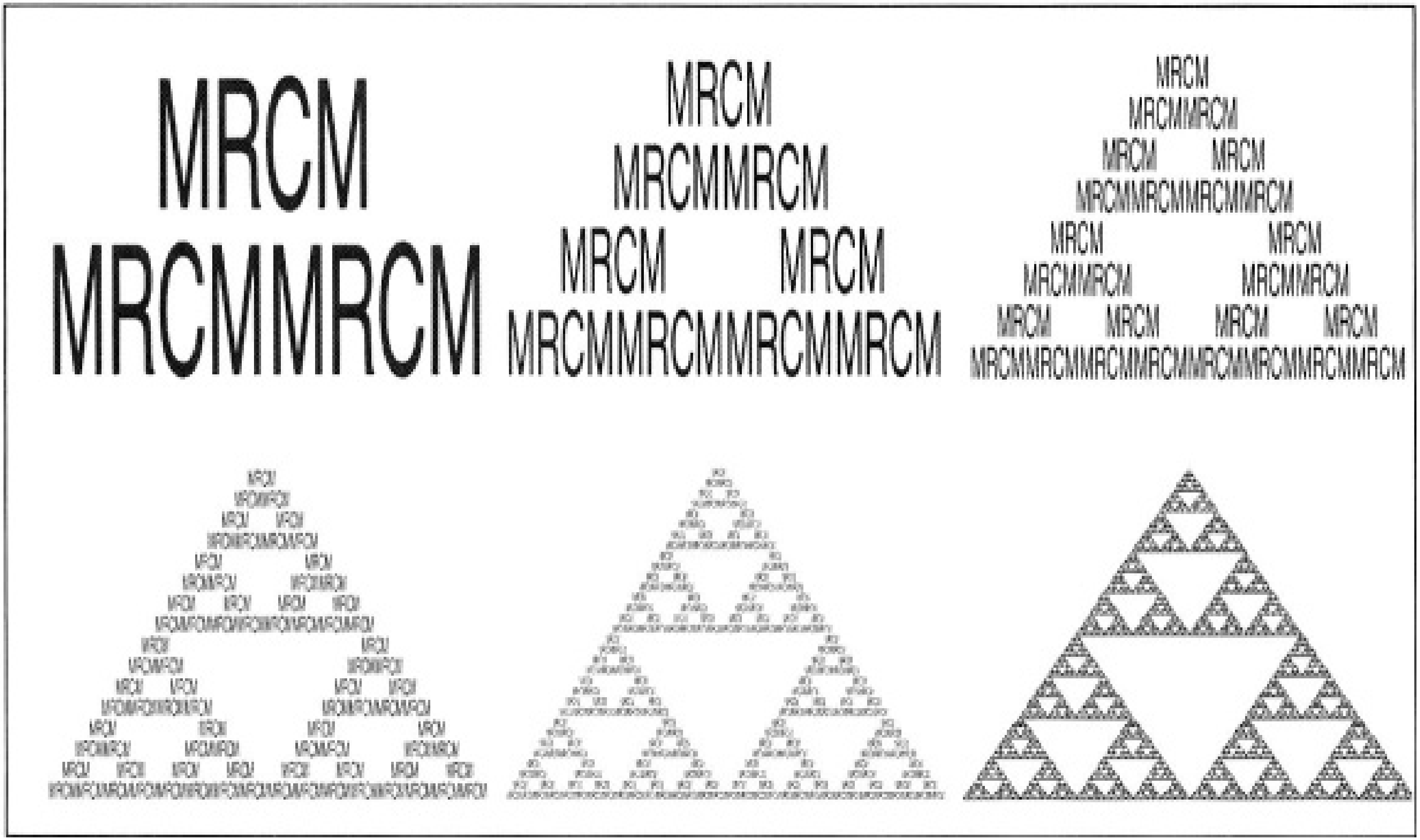
Se lo aplicamos a la siguiente figura original



Y conduce a un patrón interesante



Gasket de Sierpinski

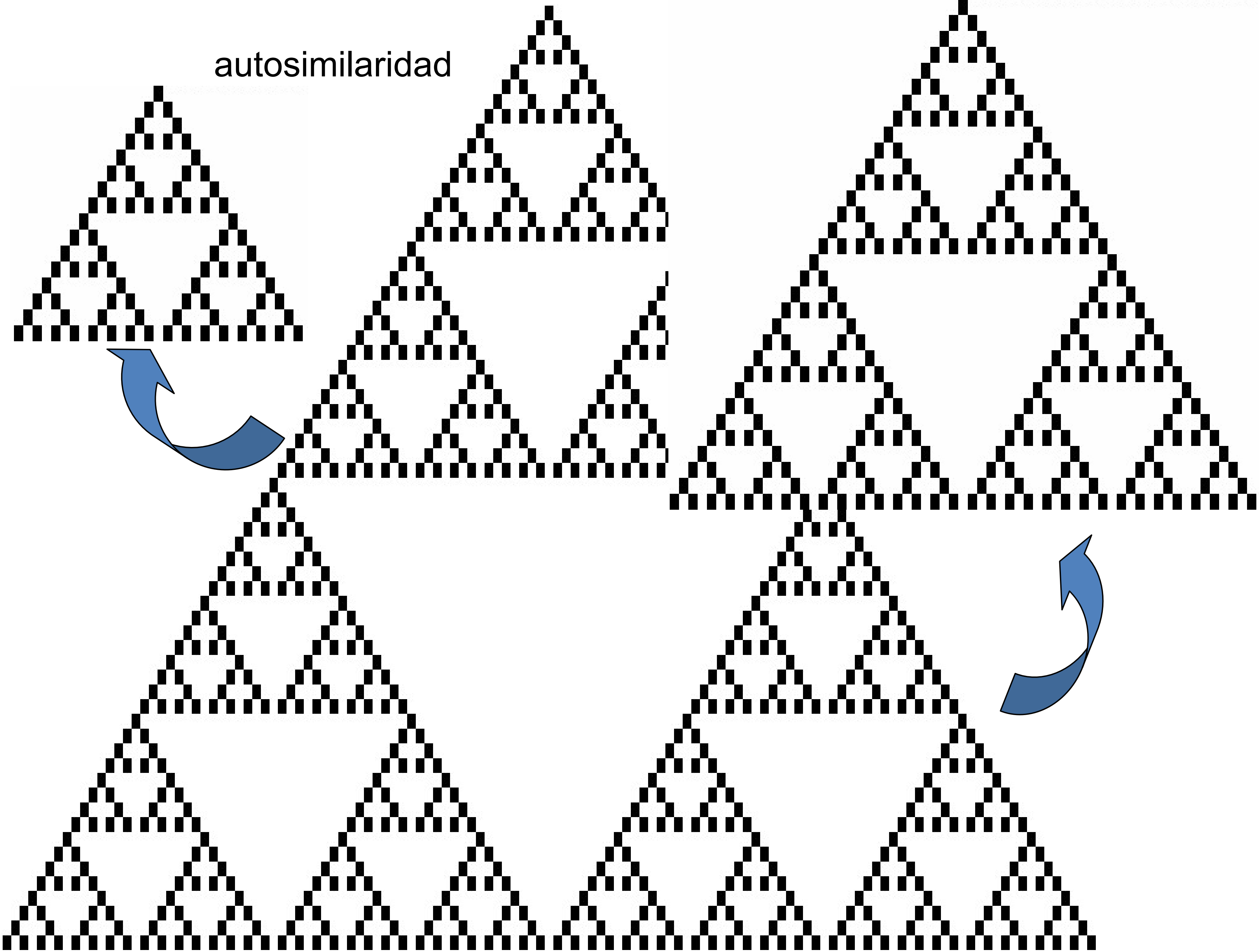


Gasket de Sierpinski

Independientemente de la figura inicial, el proceso iterativo lleva siempre al mismo patrón: Gasket de Sierpinski

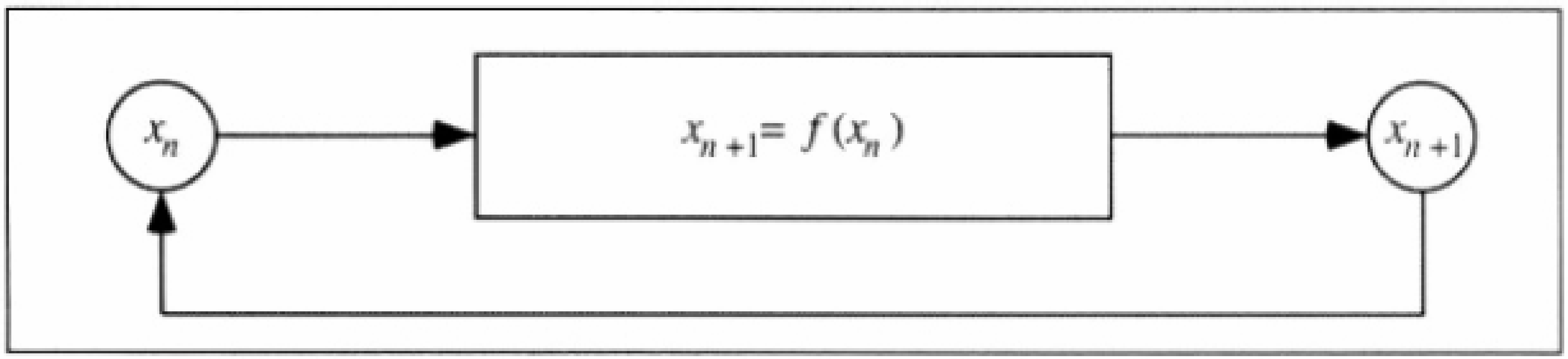
$\Rightarrow$ estabilidad

autosimilaridad



Este es un proceso de realimentado lineal e isótropo

Otros procesos realimentados



ejemplo

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)}$$

Supongamos que $a = 2$

Damos valor inicial de $x_0 = 3$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{2}{3}\right) = 1.833333$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(1.833333 + \frac{2}{1.833333}\right) = 1.46212121$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(1.46212121 + \frac{2}{1.46212121}\right) = 1.41499843$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(1.41499843 + \frac{2}{1.41499843}\right) = 1.41421378$$

Se aproxima a $\sqrt{2} = 1.41421356 \Rightarrow$ estabilidad

Realimentación en dos etapas

Corresponde a la expresión

$$x_{n+1} = g\left(x_n, x_{n-1}\right)$$

Por ejemplo,

$$g\left(x_n, x_{n-1}\right) = x_n + x_{n+1} \qquad \text{(F)}$$

Esta serie tiene propiedades y aplicaciones interesantes
Por ejemplo, comenzando con

$$x_0 = 0;\ x_1 = 1$$

Da lugar a la secuencia

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$$

De la cual se sigue que las razones

$$x_{n+1} / x_n$$

Se aproximan cuando n $\rightarrow\infty$ al número

$$1{,}61803398\ldots = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

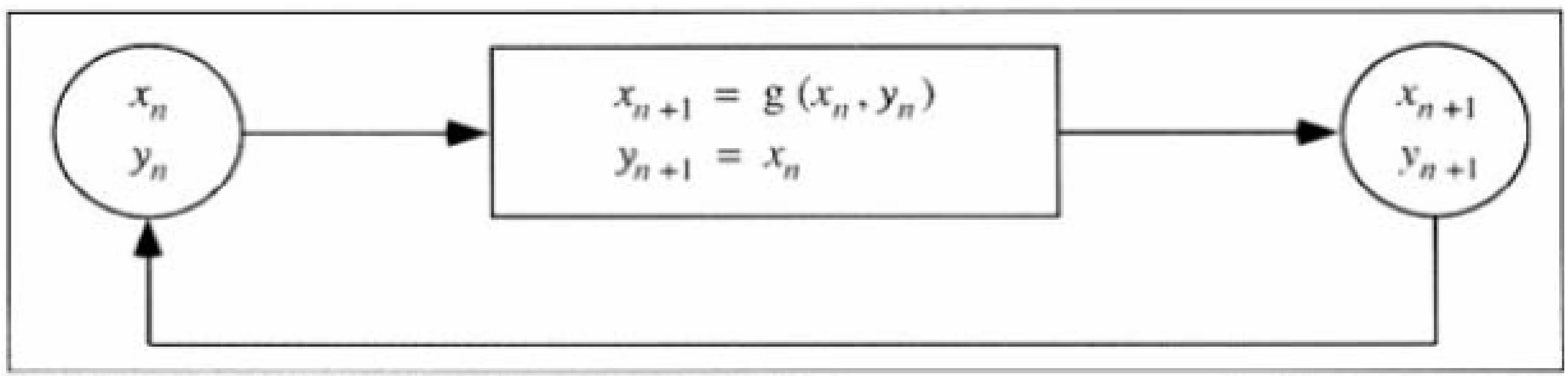
Conocido como número de oro o proporción divina.

Esta realimentación en dos etapas en verdad no difiere demasiado de la Iteración en una etapa. En realidad es la iteración en una etapa de un vector de dos componentes

Llamando:

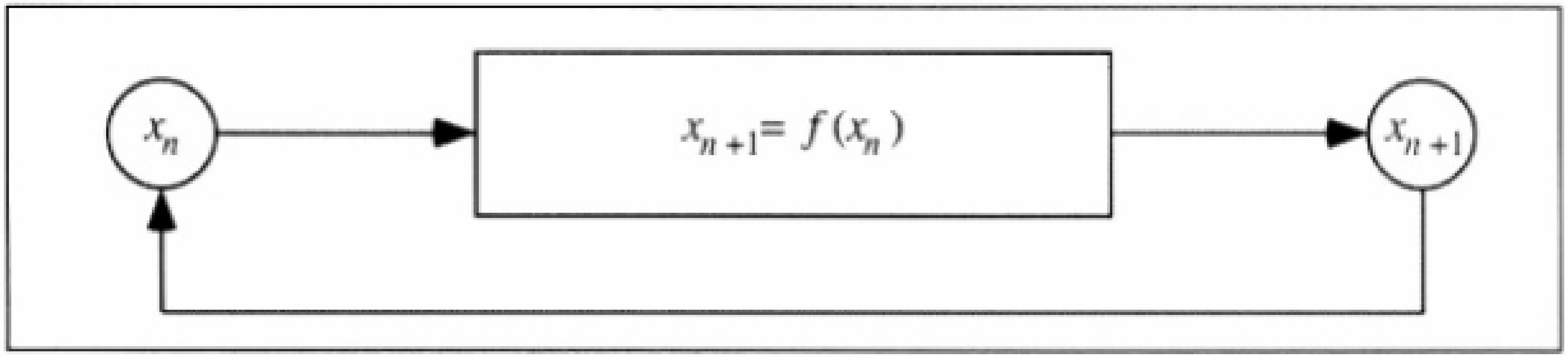
$$x_{n+1} = g(x_n, y_n) = x_n + y_n$$
$$y_{n+1} = x_n$$

Obtenemos el siguiente proceso de una etapa y dos variables:



Que produce los mismos resultados

Otro ejemplo



$$f(x_n) = \begin{cases} x_n/2 \; si \; x_n \; par \\ 3x_n + 1 \; si \; x_n \; impar \end{cases}$$

Secuencias para diferentes x_0

x_0

- 3,10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, STOP
- 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, STOP
- 75, 226, 113, 340, 170, 85, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, STOP

$$\text{STOP} = 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$$

Aparentemente la secuencia se alarga para mayor x_0 …

$x_0 = 27$

- 27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, STOP

oops!

para x_0 *negativo*

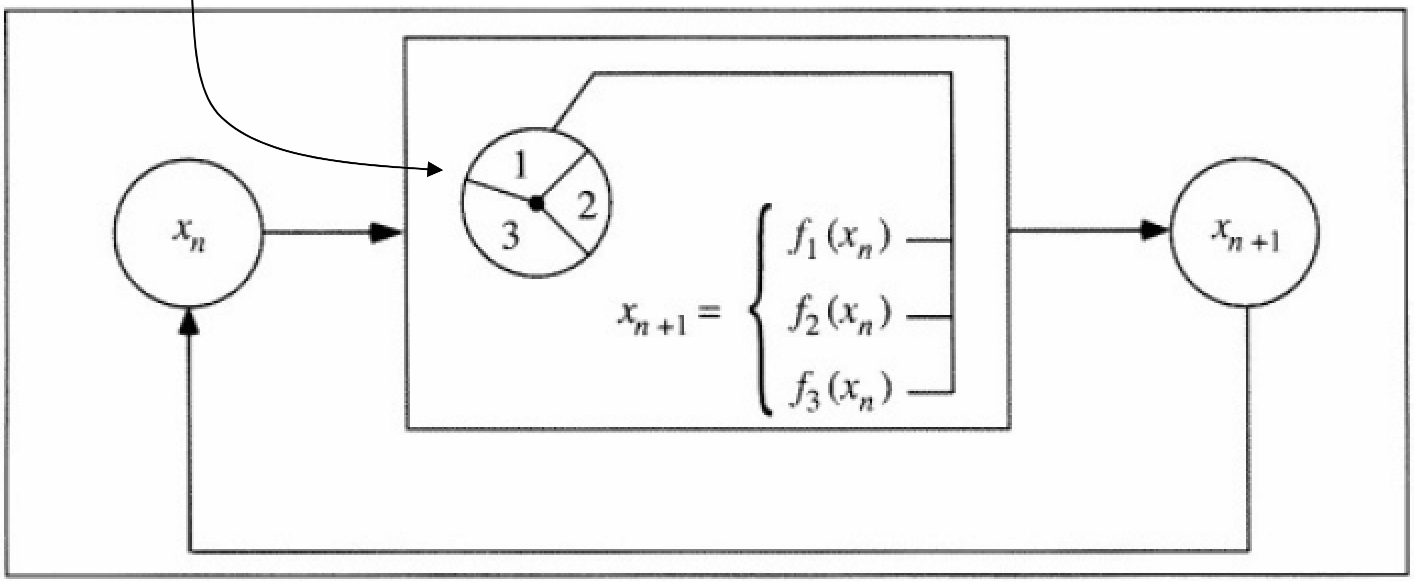
- –1, –2, –1, –2, … CYCLE of length 2
- –3, –8, –4, –2, –1, ... runs into CYCLE of length 2
- –5, –14, –7, –20, –10, –5, –14, … CYCLE of length 5
- –6, –3, –8, –4, –2, –1, ... runs into CYCLE of length 2
- –9, –26, –13, –38, –19, –56, … runs into CYCLE of length 5
- –11, –32, –16, –8, –4, –2, –1, … runs into CYCLE of length 2
- –17, –50, –25, –74, –37, –110, –55, –164, –82, –41, –122, –61, –182, –91, – 272, –136, –68, –34, –17, …CYCLE of length 18

para $x_0 = 0$

- 0, 0, … CYCLE of length 1

sorteo

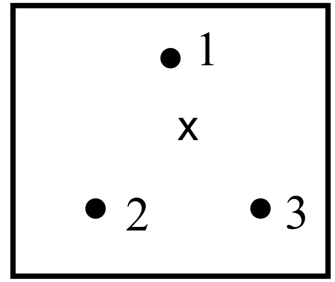
La Máquina de la Rueda de la Fortuna…



(aún no bien comprendida)

…y el juego del Caos

Marcar tres puntos en una hoja

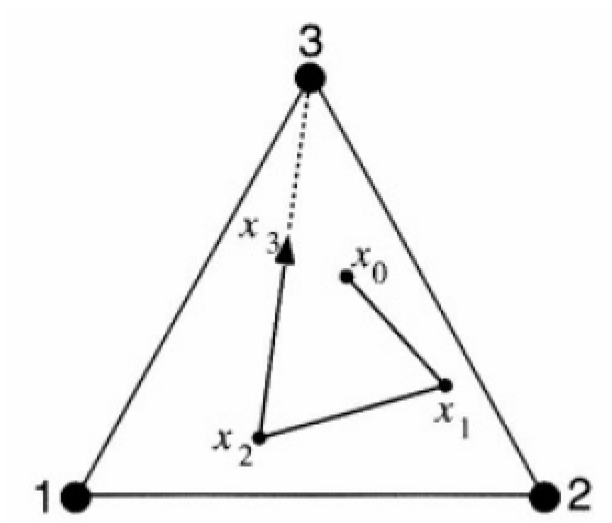


Marcar un punto inicial x

Usar un dado para seleccionar 1, 2 ó 3

Trazar un nuevo punto en el medio del segmento entre el punto inicial y el seleccionado

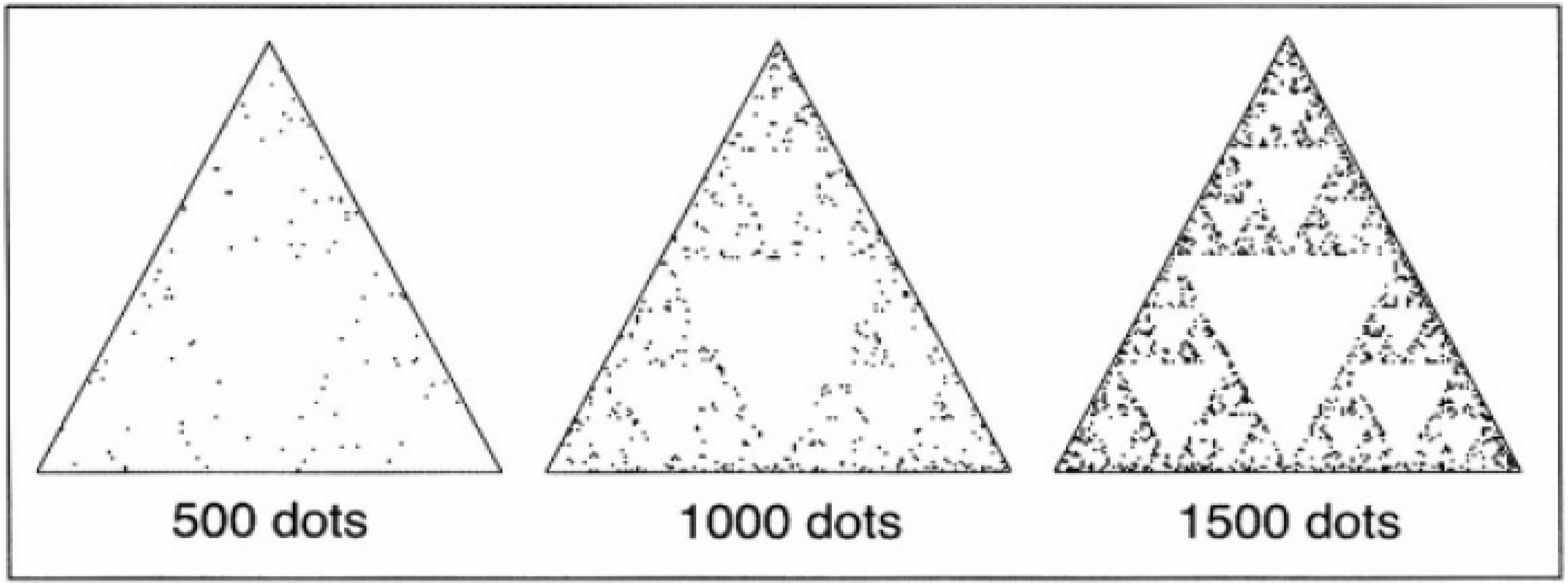
Reiterar los últimos dos pasos usando el último punto en lugar del punto inicial



¿qué sale?

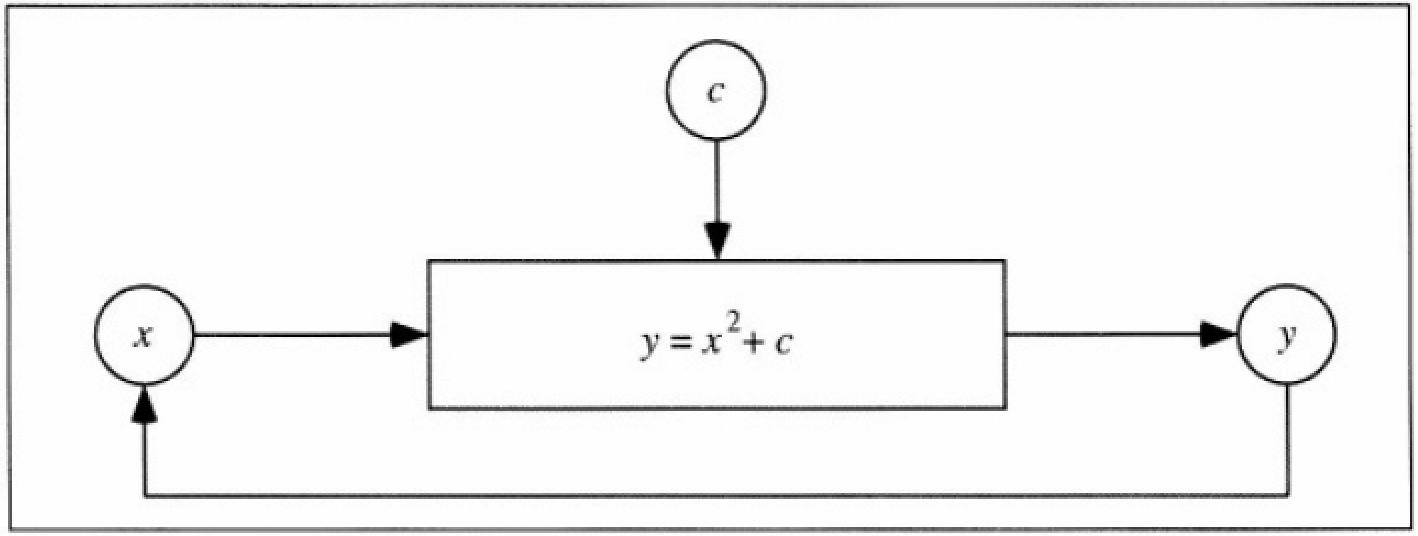
Chaos game

juego del Caos



al gasket de Sierpinski!

Iteradores cuadráticos



ejemplo

$$c = -2;\ x_0 = 0.5$$

x	$x^2 + c$
0.5	–1.75
–1.75	1.0625
1.0625	–0.87109375
–0.87109375	–1.2411956787109375

16 decimales

Importa?

the finest software sometimes produces total garbage

Heinz-Otto Peitgen

Cada vez más decisiones en el desarrollo de la ciencia y la tecnología y también en economía y política se basan en cálculos y simulaciones a gran escala

Problemas con poblaciones

Suponemos un medio ambiente constante
N es la máxima población que admite el medio ambiente
P_n es la población al tiempo n
$p_n = P_n/N$

Tasa de crecimiento

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n}$$

postulamos

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = r(1 - p_n)$$

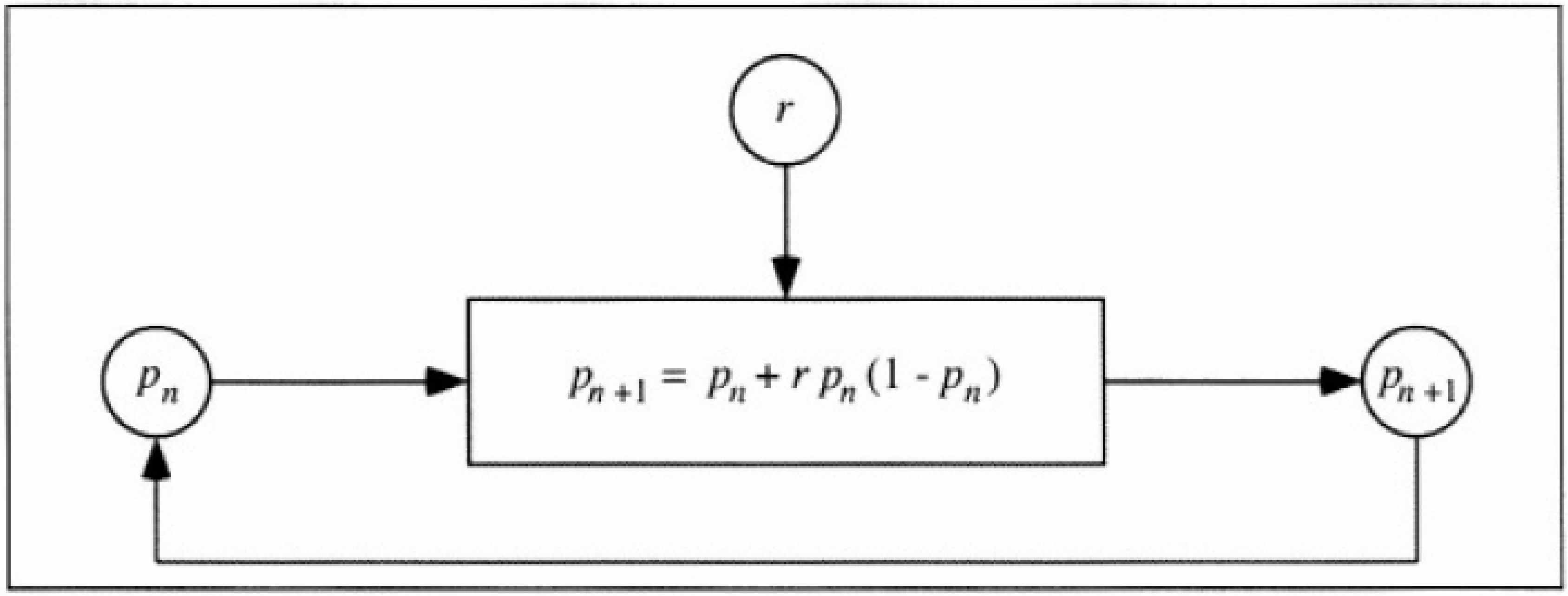
Tasa de crecimiento Proporcional a la Diferencia entre N y P_n

$$\Downarrow$$

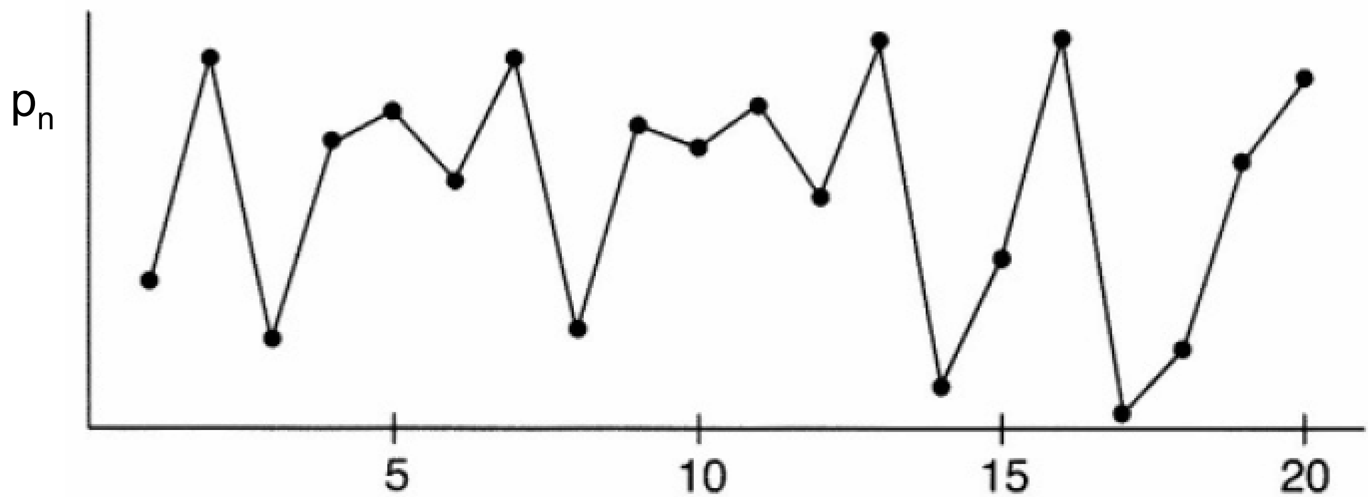
$$p_{n+1} = p_n + rp_n(1 - p_n)$$

Proceso realimentado

Proceso realimentado



Medidas de p_n a lo largo del tiempo



$$p_{n+1} = p_n + rp_n\left(1 - p_n\right)$$

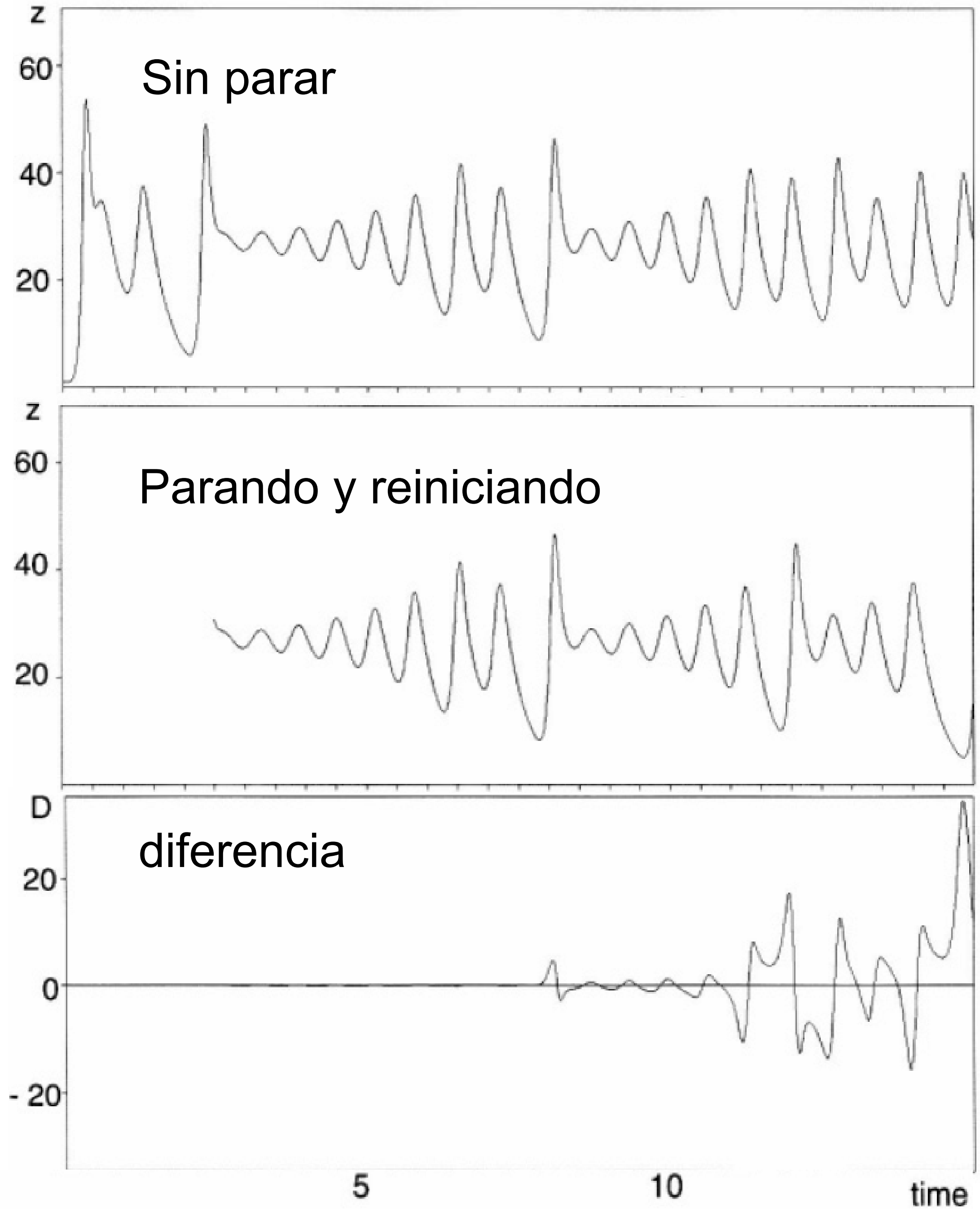
$$r = 3;\ p_0 = 0.01$$

p	$p + rp(1-p)$
0.01	0.0397
0.0397	0.15407173
0.15407173	0.545072626044...

más de 12 decimales

Interludio: el experimento de Lorenz

1956



el experimento de Lorenz aplicado a poblaciones

$$p_{n+1} = p_n + rp_n(1 - p_n)$$

$$r = 3;\ p_0 = 0.01$$

Evaluations	Without Interrupt	With Interrupt and Restart
1	0.0397	0.0397
2	0.15407173	0.15407173
3	0.5450726260	0.5450726260
4	1.288978001	1.288978001
5	0.1715191421	0.1715191421
10	0.7229143012	0.7229143012
10	0.7229143012	restart with 0.722
15	1.270261775	1.257214733
20	0.5965292447	1.309731023
25	1.315587846	1.089173907
30	0.3742092321	1.333105032
100	0.7355620299	1.327362739

Poblaciones con dos calculadoras

Evaluations	Casio	HP
1	0.0397	0.0397
2	0.15407173	0.15407173
3	0.5450726260	0.545072626044
4	1.288978001	1.28897800119
5	0.1715191421	0.171519142100
10	0.7229143012	0.722914301711
15	1.270261775	1.27026178116
20	0.5965292447	0.596528770927
25	1.315587846	1.31558435183
30	0.3742092321	0.374647695060
35	0.9233215064	0.908845072341
40	0.0021143643	0.143971503996
45	1.219763115	1.23060086551
50	0.0036616295	0.225758993390

Más confusión?

$$p_{n+1} = \frac{p_n + rp_n\left(1 - p_n\right)}{\left(1+r\right)p_n - rp_n^2}$$

Es lo mismo!

Casio

Evaluations	$p + rp(1-p)$	$(1+r)p - rp^2$
1	0.0397	0.0397
2	0.15407173	0.15407173
3	0.5450726260	0.5450726260
4	1.288978001	1.288978001
5	0.1715191421	0.1715191421
10	0.7229143012	0.7229143012
11	1.323841944	1.323841944
12	0.03769529734	0.03769529724
13	0.146518383	0.1465183826
14	0.5216706225	0.5216706212
15	1.270261775	1.270261774
20	0.5965292447	0.5965293261
25	1.315587846	1.315588447
30	0.3742092321	0.3741338572
35	0.9233215064	0.9257966719
40	0.0021143643	0.0144387553
45	1.219763115	0.0497855318

Mediante cálculos de precisión *finita* no hay cura para los efectos *dañinos* del caos

Tarde o temprano la predictibilidad *se pierde*

Nota:

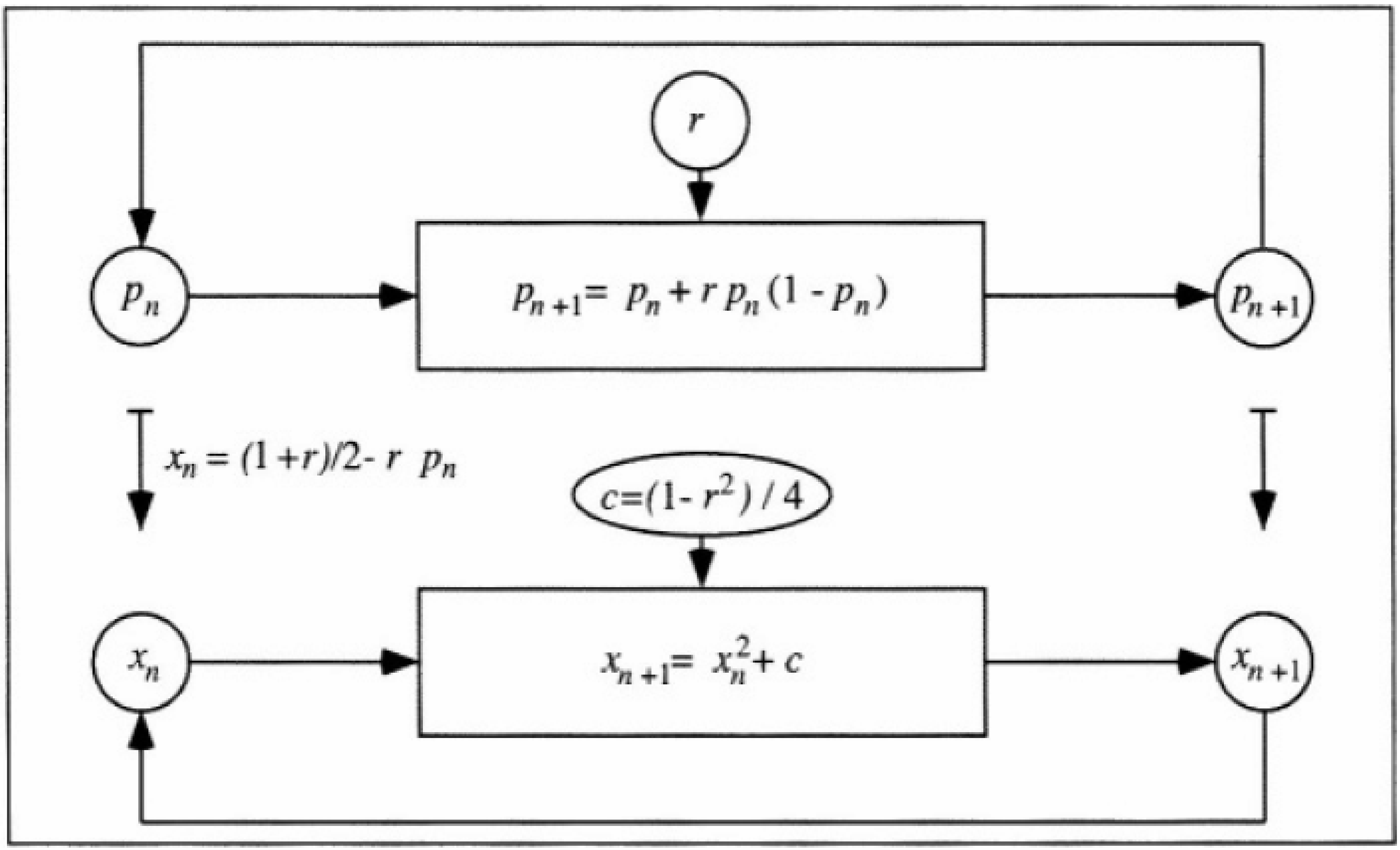
Es simple demostrar la equivalencia entre las expresiones:

$$p_{n+1} = p_n + rp_n\left(1 - p_n\right)$$
$$x_{n+1} = x_n^2 + C$$

Mediante la transformación lineal

$$\left. x_n = \frac{1+r}{2} - rp_n \qquad C = \frac{1-r^2}{4} \right\} \textit{Cambio de escala}$$

Estos dos procesos muestran el mismo comportamiento caótico



$$x = \frac{5}{9}(p - 32)$$

$F \Rightarrow C$

La culpa la tiene el cuadrado?

$$x_{n+1} = x_n^2 + c$$
$$c = -2;\ x_0 = 0.5$$

caótico

$$x_{n+1} = x_n^2 + c$$
$$c = -2;\ x_0 = 1$$

no caótico

$$x_{n+1} = x_n^2 + c$$
$$c = -2;\ x_0 = 2$$

no caótico

$$x_{n+1} = x_n^2 + c$$
$$c = -2;\ x_0 = 1{,}999999$$

caótico!

La culpa la tiene el cuadrado?

$$x_{n+1} = x_n^2 + c$$

$$c = -1;\ x_0 = 0.5$$

→ *Caótico?*

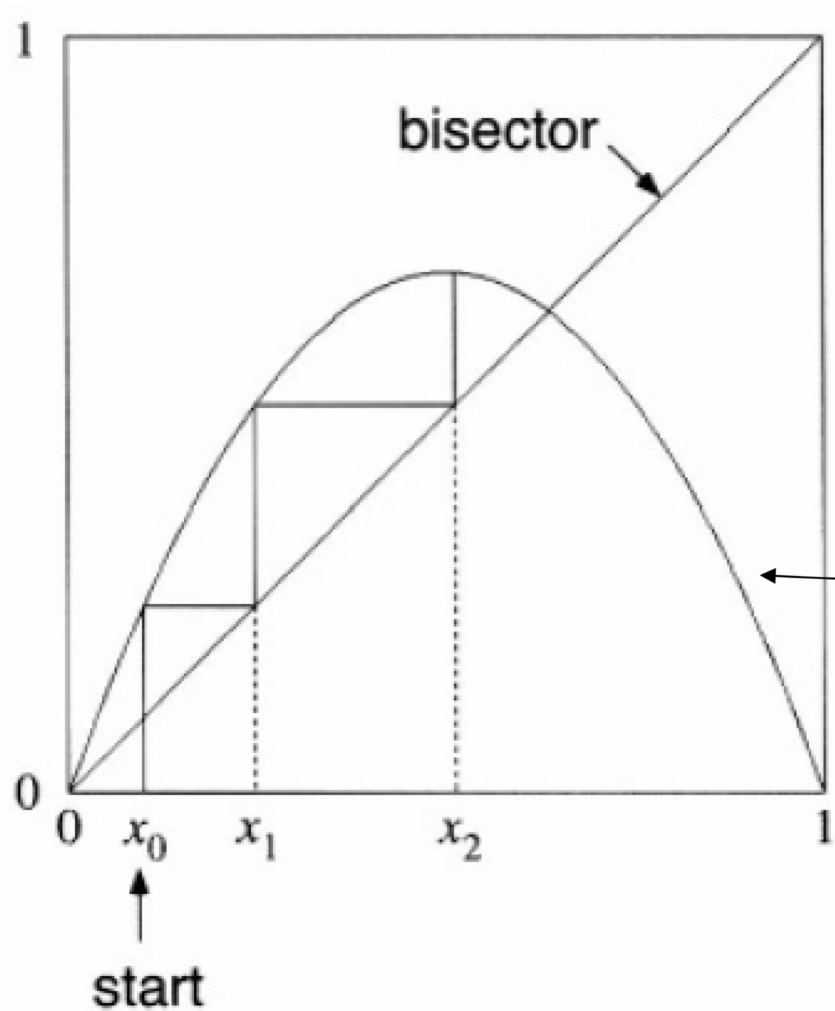
Evaluations	x	$x^2 - 1$
1	0.5	−0.75
2	−0.75	−0.4375
3	−0.4375	−0.80859375
4	−0.80859375	−0.3461761475
5	−0.3461761475	−0.8801620749
6	−0.8801620749	−0.2253147219
7	−0.2253147219	−0.9492332761
8	−0.9492332761	−0.0989561875
9	−0.0989561875	−0.9902076730
10	−0.9902076730	−0.0194887644
11	−0.0194887644	−0.9996201881
12	−0.9996201881	−0.0007594796
13	−0.0007594796	−0.9999994232
14	−0.9999994232	−0.0000011536
15	−0.0000011536	−1.0000000000
16	−1.0000000000	−0.0000000000
17	−0.0000000000	−1.0000000000

Predecible!
(estable)

Causal *Predecible!* *(estable)*	⟺	*Pequeños* *errores decaen* *en el proceso*	⟺	*Pueden* *despreciarse*
Cáótico *Impredecible!* *(inestable)*	⟺	*Pequeños* *errores se* *amplifican en* *el proceso*	⟺	*No pueden* *despreciarse* *Error ~ Señal*

Realimentación gráfica

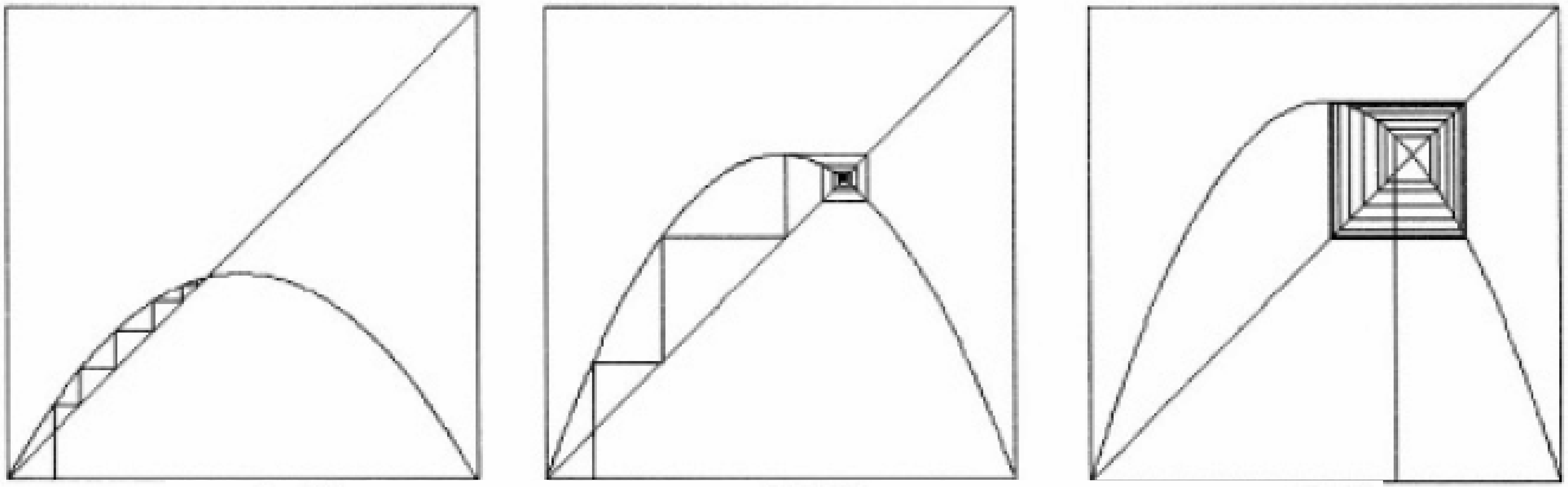
$$x_{n+1} = ax_n\left(1 - x_n\right)$$



parábola

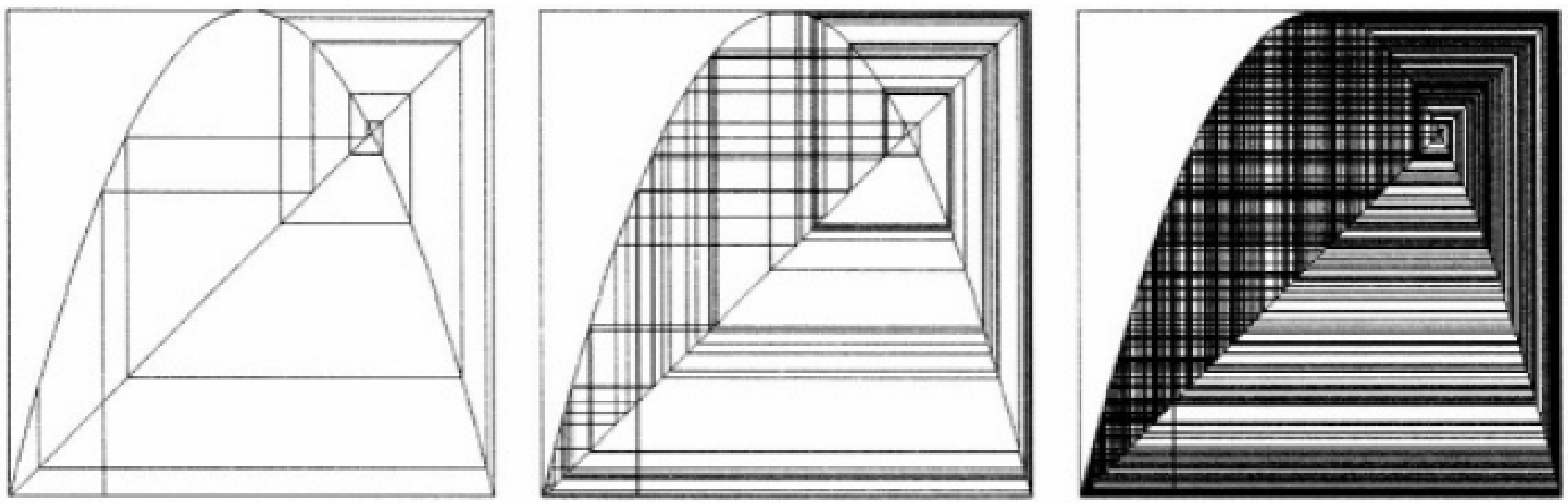
$$y = ax\left(1 - x\right)$$

estable



a=1.45 a=2.75 a=3.2

inestable



a = 4

[Caos lab]

Chau y Gracias