Núcleos y Partículas

Trabajo Práctico III - Simetrías y Teoría de Grupos

1. Determine si forman grupo (en caso de ser así, determine si el grupo es abeliano):

   a) El conjunto de todos los números complejos de módulo 1 con respecto al producto usual entre complejos ($SU(1)$).

   b) El conjunto de las tres raíces cúbicas de la unidad, con la multiplicación usual entre complejos. Encontrar una representación fiel de este grupo, en términos de matrices de 2×2.

   c) El conjunto de las matrices complejas unitarias de $n\,x\,n$ de determinante igual a 1 con el producto usual de matrices ($SU(n)$).

2. a) Estudie la tabla de composición correspondiente a las rotaciones de un cuadrado alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro.

   b) Encuentre un conjunto de matrices de 2×2 que constituyan una representación del grupo del inciso anterior.

3. Para el operador impulso angular, cuyas componentes están definidas como $L_x = -i\hbar(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y})$, $L_y = -i\hbar(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z})$ y $L_z = -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$. Demostrar:

   a) Que $[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar L_k$, donde los símbolos ϵ_{ijk}, que se conocen como las componentes del tensor de Levi Civita, toman el valor 0 si dos de los subíndices coinciden, 1 si $i = 1$, $j = 2$ y $k = 3$ o cualquier permutación cíclica y -1 para las restantes permutaciones.

   b) $[L^2, L_+] = 0 = [L^2, L_-]$, $[L_z, L_+] = +\hbar L_+$ y $[L_z, L_-] = -\hbar L_-$. Como consecuencia, $L_z L_+|\lambda m >= (m+1)\hbar L_+|\lambda m >$ y $L_z L_-|\lambda m >= (m+1)\hbar L_-|\lambda m >$.

   c) $L_+L_- = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z$ y $L_-L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$.

4. En Mecánica Cuántica no relativista, con las tres componentes del espín pueden asociarse los operadores $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ y $\hat{S}_z$. En una base de autofunciones de $\hat{S}_z$, los mismos se representan por

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Supongamos que queremos medir S_z para una partícula en el estado $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Qué resultados podemos obtener y cuál es la probabilidad de cada uno de ellos?

   b) Para la misma partícula y el mismo estado, queremos medir S_x. Qué resultados podemos obtener y con qué probabilidades?