Núcleos y Partículas Elementales

Práctica II

1. En la siguiente página:

   $https : //en.wikipedia.org/wiki/Linear_particle_accelerator$

   puede encontrar una animación que muestra el funcionamiento de un acelerador lineal (linac). En tales aceleradores, la fuente de partículas cargadas y los cilindros huecos pares están conectados a un electrodo del potencial eléctrico alterno, de amplitud V_0. Los cilindros impares están conectados al otro electrodo. La frecuencia del potencial se ajusta de modo que la partícula acelerada llegue a una región entre dos cilindros exactamente cada medio período del potencial. De ese modo, la partícula sufrirá sucesivas aceleraciones en las regiones entre cilindros y mantendrá una velocidad constante en el interior de los mismos. Suponiendo que las partículas aceleradas tienen carga $q > 0$ y masa m, que su velocidad inicial (al salir de la fuente) es nula, que inicialmente los cilindros impares están conectados al electrodo positivo y que las velocidades alcanzadas estn muy por debajo de la de la luz, demostrar que:

   a) La velocidad de la partícula en el n-ésimo cilindro es $\sqrt{\frac{4nqV_0}{m}}$;

   b) Si L_n es la longitud del n-ésimo cilindro, la misma debe ser tal que $\frac{L_n}{L_1} = \sqrt{n}$;

   c) El período del potencial alterno debe ser $T = L_1\sqrt{\frac{m}{qV_0}}$.

   d) Calcular la frecuencia de un acelerador lineal de cinco etapas, en el cual $L_1 = 10cm$, usado para acelerar iones de carga $q = 2 \times 1,6 \times 10^{-19}C$ (dos unidades de carga eléctrica) y masa $m = 4 \times 1,67 \times 10^{-27}kg$ (cuatro unidades de masa atómica). Suponer que la amplitud del potencial es $V_0 = 100V$.

2. En el marco de la relatividad especial, la fuerza actuante sobre una partícula cargada sometida a un campo magnético (caso de campo eléctrico nulo de la fuerza de Lorentz) está dada por $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Sabiendo que el impulso espacial de la partícula es $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$,

   a) Demostrar que el módulo de la velocidad angular (llamada de Larmor o del ciclotrón) está dado por $\omega = \frac{q|\vec{B}|}{\gamma\, m}$, donde m es la masa de la partícula y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$.

   b) Cuál es el módulo del vector cantidad de movimiento de una partícula de carga igual a la carga del electrón sabiendo que, en una cámara de burbujas donde actúa un campo magnético de $|\vec{B}| = 2T$, describe una órbita de radio $R = 33,4cm$

3. Utilizando la conservación de energía e impulso y recordando que, tanto para el fotón incidente como para el fotón saliente, se tiene $E_\gamma = h\,\nu$, demuestre la fórmula de Compton, que expresa, como función del ángulo, la longitud de onda del fotón saliente en términos de la del fotón entrante.

4. Determine si forman grupo (en caso de ser así, determine si el grupo es abeliano):

   a) El conjunto de todos los números complejos de módulo 1 con respecto al producto usual entre complejos ($SU(1)$).

   b) El conjunto de las tres raíces cúbicas de la unidad, con la multiplicación usual entre complejos. Encontrar una representación fiel de este grupo, en términos de matrices de 2×2.

   c) El conjunto de las matrices complejas unitarias de $n\,x\,n$ de determinante igual a 1 con el producto usual de matrices ($SU(n)$).

5. a) Estudie la tabla de composición correspondiente a las rotaciones de un cuadrado alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro.

   b) Encuentre un conjunto de matrices de 2×2 que constituyan una representación del grupo del inciso anterior.

6. Para el operador impulso angular, cuyas componentes están definidas como $L_x = -i\hbar(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y})$, $L_y = -i\hbar(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z})$ y $L_z = -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$. Demostrar:

   a) Que $[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar L_k$, donde los símbolos ϵ_{ijk}, que se conocen como las componentes del tensor de Levi Civita, toman el valor 0 si dos de los subíndices coinciden, 1 si $i = 1$, $j = 2$ y $k = 3$ o cualquier permutación cíclica y -1 para las restantes permutaciones.

   b) $[L^2, L_+] = 0 = [L^2, L_-]$, $[L_z, L_+] = +\hbar L_+$ y $[L_z, L_-] = -\hbar L_-$. Como consecuencia, $L_z L_+|\lambda m >= (m+1)\hbar L_+|\lambda m >$ y $L_z L_-|\lambda m >= (m+1)\hbar L_-|\lambda m >$.

   c) $L_+L_- = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z$ y $L_-L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$.

7. En Mecánica Cuántica no relativista, con las tres componentes del espín pueden asociarse los operadores $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ y $\hat{S}_z$. En una base de autofunciones de $\hat{S}_z$, los mismos se representan por

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Supongamos que queremos medir S_z para una partícula en el estado $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Qué resultados podemos obtener y cuál es la probabilidad de cada uno de ellos?

   b) Para la misma partícula y el mismo estado, queremos medir S_x. Qué resultados podemos obtener y con qué probabilidades?