Núcleos y Partículas Elementales

Práctica I

1. Dado el boost de Lorentz:

$$\begin{aligned} c\,t' &= \gamma\,(c\,t - \beta\,x) \\ x' &= \gamma\,(x - \beta\,c\,t) \\ y' &= y \\ z' &= z\,, \end{aligned} \tag{0.1}$$

donde $\beta = \frac{v}{c}$ y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$,

a) Encuentre la matriz M de 4×4 tal que $x'^{\mu} = M^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$. Encuentre la matriz inversa de la anterior.

b) Demuestre que el intervalo, $s^2 = -(c\,t)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ permanece invariante frente a dicho boost de Lorentz.

c) Es invariante frente a una rotación espacial de ángulo α alrededor del eje z?

d) Cómo se transforma la matriz métrica, $diag(-1, 1, 1, 1)$ frente a ambos tipos de transformaciones?

2. Usando la expresión del boost de Lorentz del ejercicio anterior demuestre que si, para el observador inercial S, dos eventos ocurren simultáneamente en dos posiciones distintas, no resultan simultáneos para el observador S'.

3. Mediante consideraciones dimensionales, obtenga una expresión para la masa de Planck como producto de potencias arbitrarias de $\hbar$, c y G (proponga $m_P = c^{\alpha}\, G^{\beta}\, \hbar^{\gamma}$ y determine los valores de α, β y γ). Recuerde que: $[c] = [L][T]^{-1}$, $[G] = [M]^{-1}[L]^3[T]^{-2}$ y $[\hbar] = [M][L]^2[T]^{-1}$.

4. Un análisis basado en consideraciones dimensionales permite obtener, en forma aproximada, el radio de la órbita correspondiente al nivel fundamental del átomo de hidrógeno, conocido como radio de Bohr, sin resolver la ecuación diferencial, como sigue:

a) Recordando que la energía cinética del electrón es $E_K = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$ y la energía potencial es $-\frac{\alpha}{r}$, donde α es la constante de estructura fina, escriba la energía total del electrón usando que, por consideraciones dimensionales, $|\vec{p}| \sim \frac{1}{r}$.

b) Determine el radio que minimiza la expresión obtenida, para la energía, en el inciso a). Así, obtendrá el radio aproximado de la primera órbita, expresado en MeV^{-1}.

c) Multiplique su resultado del inciso b) por las potencias de c y $\hbar$ necesarias para expresarlo en metros. Compare el valor así obtenido con el valor exacto del radio de Bohr ($5,29 \times 10^{-11} m$).