

# **Núcleos y Partículas Elementales**

**Maestría en Física Contemporánea  
Departamento de Física - Universidad Nacional  
de La Plata**

Eve Mariel Santangelo

3 de septiembre de 2019

---

# Índice general

<b>I</b>	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
I.1.	Breve repaso de la teoría de la relatividad especial . . . . .	9
I.2.	Unidades y órdenes de magnitud . . . . .	12
I.3.	Cómo se producen partículas? . . . . .	14
I.3.1.	Rayos cósmicos . . . . .	15
I.3.2.	Reactores nucleares . . . . .	15
I.3.3.	Aceleradores de partículas . . . . .	15
I.4.	Cómo se detectan partículas? . . . . .	19
I.5.	Ejercicios propuestos . . . . .	22
<b>II</b>	<b>Evolución histórica</b>	<b>25</b>
II.1.	Partículas “elementales” hasta 1930 . . . . .	27
II.2.	Más partículas “elementales” (desde 1930 hasta 1960) . . . . .	32
II.2.1.	El mesón pi y el muón . . . . .	32
II.2.2.	Antipartículas . . . . .	33
II.2.3.	Los neutrinos . . . . .	35
II.2.4.	Partículas “extrañas” . . . . .	38
II.3.	La “óctuple senda” (eightfold way) y el modelo de quarks . . . . .	40
II.4.	Evolución de las teorías de las interacciones fundamentales . . . . .	45
II.5.	Ejercicios propuestos . . . . .	46
<b>III</b>	<b>Simetrías en Física Subatómica</b>	<b>51</b>
III.1.	Simetrías, grupos y leyes de conservación . . . . .	53
III.2.	Rupturas de simetría . . . . .	57
III.3.	Momento angular orbital y espín en Mecánica Cuántica no relativista . . . . .	58
III.4.	Ejercicios propuestos . . . . .	63
<b>IV</b>	<b>Física nuclear</b>	<b>65</b>
IV.1.	Fenomenología de los núcleos . . . . .	67
IV.2.	Modelos para la estructura nuclear . . . . .	69
IV.2.1.	Modelos efectivos . . . . .	70

IV.2.2. Independencia de carga e isospín nuclear . . . . .	76
IV.3. Reacciones nucleares. Aplicaciones y efectos nocivos de la Física Nuclear	78
IV.3.1. Desintegraciones nucleares . . . . .	78
IV.3.2. Fisión nuclear . . . . .	83
IV.3.3. Fusión nuclear . . . . .	89
IV.4. Efectos de la radiación nuclear . . . . .	90
IV.5. Ejercicios sugeridos . . . . .	91

**V Introducción a las Teorías de Campos para las Interacciones Fundamentales 93**

V.1. Intentos de construir una Mecánica Cuántica Relativista. Problemas de interpretación . . . . .	96
V.1.1. Partícula sin espín. Ecuación de Klein-Gordon . . . . .	96
V.1.2. La ecuación de Dirac . . . . .	99
V.2. Teorías de Campos Relativistas . . . . .	103
V.2.1. Construcción de acciones clásicas. Ecuaciones clásicas de movimiento y cargas conservadas . . . . .	103
V.2.2. Teorías de campos libres . . . . .	106
V.2.3. Teorías de campos interactuantes . . . . .	113
V.3. Ejercicios sugeridos . . . . .	122

# **Parte I**

## **Introducción**



---

La Introducción está basada, principalmente, en el contenido de las referencias [1, 2, 3, 4].

Es un hecho, y es muy notable, que toda la materia aparece mayormente concentrada en muy pequeños (comparados con la escala humana) fragmentos constituyentes. Todavía más notable es que podamos identificar unos pocos tipos diferentes de esos fragmentos, que se replican cantidades astronómicas de veces para conformarnos a nosotros y a toda la materia que nos rodea. Aún más: esas réplicas son réplicas exactas, no sólo similares, como ocurre con objetos macroscópicos. Por ejemplo, todos los electrones son indistinguibles entre sí. Y lo mismo ocurre con el resto de las partículas elementales.

Las dos preguntas fundamentales (muy íntimamente relacionadas) que la física subatómica intenta responder son:

- ¿De qué está hecha la materia al nivel más fundamental? ¿Cuáles son las partículas elementales? Dicho de otro modo: ¿cuáles son las partículas que, bajo la suposición de no tener estructura interna, permiten dar una descripción simple, y tan unificada como sea posible, de la naturaleza?

Simultáneamente con esa primera pregunta, deberemos dar respuesta a la siguiente:

- ¿Cómo interactúan esas partículas y cómo, a partir de esas interacciones fundamentales, resultan las interacciones entre las partículas compuestas?

El objetivo de este curso es responder ambas preguntas, según nuestro conocimiento actual, es decir, estudiar el modelo actualmente conocido como modelo estándar de la física de partículas elementales.

Es bien sabido que, a principio del siglo pasado, se desarrollaron dos ideas revolucionarias en la descripción teórica de los fenómenos físicos: la Mecánica Cuántica (C) y la Teoría de la Relatividad (R). La primera se aplica a sistemas de tamaño atómico ( $\sim 10^{-10}$  m) o menor. La segunda, a sistemas que se mueven a velocidades comparables con la velocidad de la luz ( $\sim 3 \times 10^8$  m/s). Así, podemos dividir la Física actual en cuatro grandes secciones: NCNR, NCR, CNR y CR. De estas cuatro grandes secciones de la Física, la primera (NCNR) es la que describe los procesos que percibimos diariamente (sistemas de tamaño mucho mayor que el atómico, que se mueven a velocidades muy inferiores a la de la luz. A esta suele llamársela Física Clásica porque, al estar ligada directamente con la escala accesible a la percepción sensorial, fue la primera que se desarrolló. Pero, actualmente, todas las secciones han sido suficientemente testeadas como para tenerlas por bien establecidas y deberían ser consideradas igualmente “clásicas”.

Los sistemas físicos que estudiaremos en estas clases, por ser de tamaño atómico o subatómico, requerirán un tratamiento cuántico. Como veremos, la estructura nuclear puede explicarse de modo aproximado con teorías efectivas (no fundamentales) no relativistas (CNR), mientras que una teoría fundamental de las partículas realmente elementales requiere el uso de teorías cuánticas relativistas (CR).

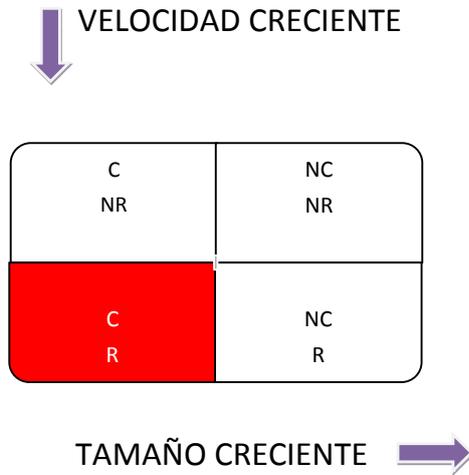


Figura 1: Dominios de la Física

Hay ciertas cuestiones generales que valen independientemente de la forma particular de la interacción, porque surgen directamente del tipo de dominio de la física que se está considerando. Por ejemplo, de la relatividad, de la mecánica cuántica, o de la combinación de ambas. En el marco de la relatividad, igual que en la mecánica no relativista, la energía y la cantidad de movimiento son siempre conservadas en procesos de desintegración o dispersión. Pero, a diferencia de lo que ocurre en la mecánica no relativista, la masa en reposo no tiene por qué conservarse. Una desintegración del tipo

$$x \rightarrow y + z$$

puede perfectamente ocurrir, aun cuando la masa en reposo de la partícula  $x$  sea mayor que la suma de las masas en reposo de las partículas  $y$  y  $z$ . Además, la relatividad admite la existencia de partículas sin masa, como el fotón, algo que no tendría sentido en la teoría de Newton.

También la mecánica cuántica exige ampliar ciertos conceptos que provienen de la teoría clásica: un dado sistema cuántico se describe por su estado. Si estudiamos un proceso, tal como una transición de un estado a otro, todo lo que podemos calcular es la probabilidad de su ocurrencia. Por ejemplo: lo más común es que un pión cargado se desintegre en un muón más un neutrino, pero no todos lo hacen. Algunos prefieren desintegrarse en un electrón más un neutrino. La probabilidad de que ocurra esta segunda transición es menor que la probabilidad de que ocurra la primera, pero no es nula.

Finalmente, la unión de relatividad y mecánica cuántica da lugar a cosas únicas, como la existencia de antipartículas y la demostración del principio de exclusión de Pauli para partículas de espín  $\frac{1}{2}$ , entre otras cosas.

Las respuestas, fuertemente interdependientes, a las dos preguntas planteadas al comienzo de esta sección han ido variando con el tiempo, de forma particularmente vertiginosa durante el siglo pasado. El modo usual de reponder a ellas consiste en estudiar

la naturaleza mediante experimentos, generalmente basados en la colisión entre partículas. Los rápidos avances tecnológicos realizados durante el último siglo han permitido efectuar estos experimentos a energías siempre crecientes. Como veremos más adelante, es posible comprender que energías cada vez mayores permiten explorar distancias cada vez más pequeñas y, por lo tanto, conducen a una resolución cada vez más detallada de la estructura de la materia. Así, las partículas que parecían elementales en experimentos realizados a una dada energía resultan, cuando se los mira a energías mayores, estar compuestas de partículas más elementales. La aceleración de partículas hasta alcanzar mayores energías permite, también obtener, como productos de dispersiones, partículas de masas mayores.

En los últimos tiempos, se ha llegado a desarrollar una teoría que describe todas las interacciones entre partículas elementales, salvo la interacción gravitatoria. Esta teoría -reunión de la teoría de Glashow, Salam y Weinberg (GSW) para las interacciones electromagnéticas y débiles (unificadas bajo el nombre de interacciones electrodébiles) y de la Cromodinámica Cuántica (QCD) para la interacción fuerte, recibe el nombre de Modelo Estándar. Desde 1973, cuando se midieron las corrientes débiles neutras predichas por GSW y 1978, cuando se detectaron las partículas mediadoras igualmente predichas, el Modelo Estándar ha resistido todos los tests experimentales (incluso, la detección de eventos compatibles con la existencia de la partícula de Higgs ha sido anunciada por ambos experimentos diseñados a tal efecto en el CERN). Hay, ciertamente, algunos elementos demasiado “ad hoc” en el modelo. Pero proporciona una descripción de la realidad notablemente acertada de las tres interacciones más relevantes a nivel subatómico (electromagnéticas, débiles y fuertes), para las energías alcanzadas en los experimentos. Aunque la fuerza gravitatoria no admite cuantización resulta, como veremos con una estimación, despreciable frente a las restantes fuerzas dentro del rango de masas a considerar.

## I.1. Breve repaso de la teoría de la relatividad especial

Cuando se estudia la física de partículas no relativistas (física de Newton), se aplica el principio de relatividad que podemos llamar de Galileo:

- Las medidas realizadas por dos observadores INERCIALES se relacionan entre sí por una transformación de Galileo.

- Las leyes de la mecánica son las mismas para todos los observadores inerciales.

Para dos observadores inerciales  $O$  y  $O'$  cuyos respectivos sistemas de referencia se muestran en la figura 2, las transformaciones de Galileo toman la forma:

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z.\end{aligned}\tag{1}$$

Obsérvese, en particular, que ambos observadores inerciales miden el mismo tiempo. La noción de simultaneidad tiene, entonces, sentido cuando se comparan medidas rea-

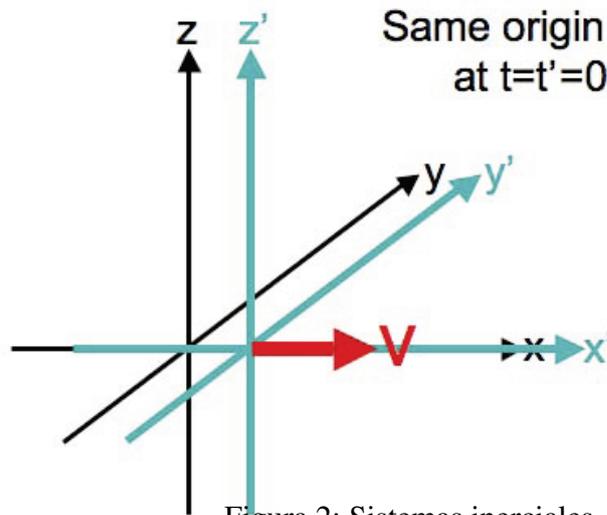


Figura 2: Sistemas inerciales

lizadas por observadores inerciales que se mueven a bajas velocidades. Para partículas que se mueven a velocidades próximas a la de la luz ( $c$ ), en cambio, vale el principio de relatividad especial de Einstein:

- Las medidas realizadas por dos observadores INERCIALES se relacionan entre sí por una transformación de Lorentz.
- Las leyes de la física son las mismas para todos los observadores inerciales.
- $c$  es una constante universal (todos los observadores miden el mismo valor de la velocidad de la luz en el vacío).

Las transformaciones de Lorentz, para el caso de la figura 2, están dadas por:

$$\begin{aligned}
 ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\
 x' &= \gamma(x - \beta ct) \\
 y' &= y \\
 z' &= z,
 \end{aligned} \tag{2}$$

donde  $\beta = \frac{v}{c}$  y  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ . Observar:

1) La velocidad relativa entre observadores debe ser siempre estrictamente menor que  $c$ .

2) En el límite no relativista ( $\frac{v}{c} \ll 1$ ), o bien  $\beta \rightarrow 0$ , las transformaciones de Lorentz se reducen a las de Galileo, como debe ser, ya que sabemos que la física de Newton describe bien los sistemas que se mueven a velocidades pequeñas en comparación con  $c$ .

Las variables espaciales y temporales medidas en un dado sistema inercial pueden considerarse como las cuatro componentes de un objeto  $X$ , llamado un tetravector contravariante frente a transformaciones de Lorentz. Por ejemplo, en el sistema  $O$ :

$$X : (ct, x, y, z). \tag{3}$$

La posición espacio-temporal del mismo objeto, en el sistema  $O'$  estará caracterizado por las variables primadas:

$$X : (ct', x', y', z'). \quad (4)$$

con las variables primadas y sin primar relacionadas como lo establece la ecuación (2). Cualquier objeto cuyas componentes se transformen de este modo frente a una transformación de Lorentz como la que estamos estudiando será, también, un tetravector contravariante. A partir de las coordenadas de  $X$  en un dado sistema inercial puede formarse otro objeto, llamado el intervalo espacio-temporal, que ya no es un tetravector contravariante, sino un escalar de Lorentz: todos los observadores inerciales miden el mismo valor del intervalo (ver ejercicio en Trabajo Práctico 1). El intervalo se define por:

$$s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

que puede pensarse como una “distancia” en un espacio pseudoeuclídeo, llamado espacio de Minkowski. Nótese que hemos elegido las componentes del tensor métrico de dicho espacio como  $(-, +, +, +)$  (la elección  $(+, -, -, -)$  es igualmente posible y no cambia los resultados físicos. Nuestra elección hace evidente que la parte espacial del intervalo corresponde a una auténtica distancia. Un espacio vectorial de este tipo, dotado de un “producto escalar” no definido positivo, se conoce como un espacio pseudoeuclídeo.

Obsérvese, de paso, que la contribución al intervalo de la parte espacial coincide con la distancia en el espacio euclídeo tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . De la misma forma puede definirse un escalar de Lorentz a partir de cualquier tetravector contravariante. Un tetravector que usaremos a menudo es el tetraimpulso o tetravector de energía-impulso:

$$P : \left( \frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right),$$

donde  $E$  es la energía de una dada partícula y  $\vec{p}$  es su cantidad de movimiento. A partir de este tetravector puede, con la misma regla usada para construir el intervalo a partir de  $X$ , construirse un escalar de Lorentz, dado por:

$$-\left( \frac{E}{c} \right)^2 + (p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2 = -m^2 c^2,$$

o bien

$$E^2 = (cp_x)^2 + (cp_y)^2 + (cp_z)^2 + m^2 c^4, \quad (5)$$

donde  $m$  se llama la masa en reposo de la partícula. Obsérvese que, en particular, en un sistema de referencia donde la cantidad de movimiento de la partícula sea el vector nulo ( $p_x = p_y = p_z = 0$ ), resulta una de las ecuaciones más famosas de la física:

$$E = \pm m c^2.$$

Es, justamente, esta ecuación la que permite definir la masa de una partícula.

## I.2. Unidades y órdenes de magnitud

Una referencia muy interesante es [5]

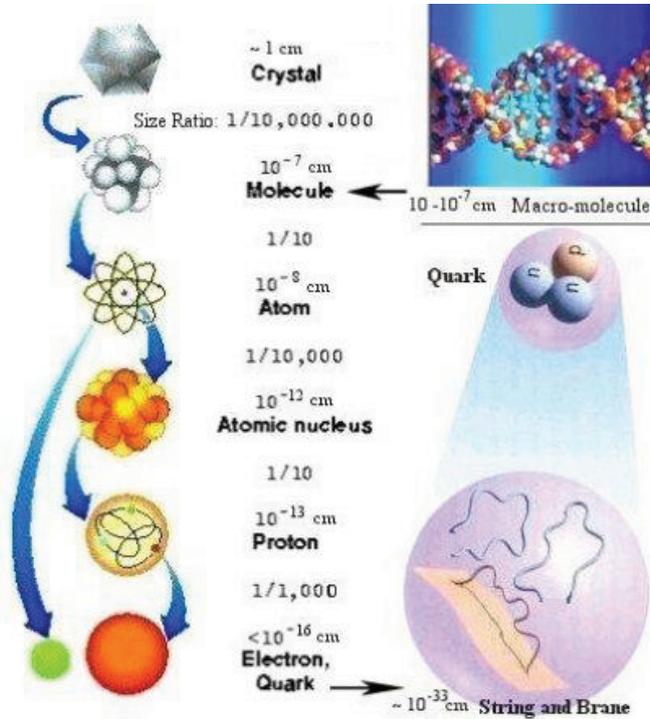


Figura 3: Escalas de longitud

De la figura 3 se ve claramente que las longitudes con las cuales trataremos al estudiar física nuclear y física de partículas elementales son extremadamente pequeñas comparadas con la escala humana ( $\sim 1m$ ). Por esa causa, las longitudes que caracterizan a estos sistemas se expresan, usualmente, en femtometros, también llamados, en este contexto, Fermi:  $1fm = 10^{-15}m$ . En cuanto a las energías, las mismas se expresan en múltiplos de electrón volt. Un electrón volt ( $eV$ ) es la energía que adquiere una partícula de carga ( $e$ ) igual al valor absoluto de la carga del electrón, cuando atraviesa una diferencia de potencial de  $1V$ . Por lo tanto, se tiene  $1eV = 1,602 \cdot 10^{-19}J$ , ya que  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}C$ . Esta unidad de energía es adoptada porque las partículas subatómicas son usualmente aceleradas usando campos electromagnéticos. En general, vamos a tratar con energías grandes, y haremos uso de múltiplos de esta unidad, que anotaremos con los prefijos usuales:  $1keV = 10^3eV$ ,  $1MeV = 10^6eV$ ,  $1GeV = 10^9eV$ ,  $1TeV = 10^{12}eV$ . Los órdenes de magnitud de las energías que nos interesarán aparecen en la figura 4. En particular, cuando estudiemos Física Nuclear, consideraremos energías que irán desde los MeV hasta

unos pocos GeV. En Física de Partículas Elementales, en cambio, las energías a considerar irán desde los GeV hasta los TeV.

Energía (eV)	Comentarios
$1.2 \times 10^{28}$	Energía de Planck
$\sim 3 \times 10^{25}$	Escala de unificación fuerzas débiles, electromagnéticas y fuertes
	DESIERTO DE ENERGÍAS
$\sim 10^{12}$	Energía máxima accesible al LHC
$\sim 2 \times 10^{11}$	Masa en reposo del quark top
$\sim 9 \times 10^{10}$	Masa en reposo de los bosones intermediarios ( $W^+$ , $W^-$ , $Z^0$ )
$\sim 1 \times 10^9$	Masa en reposo del protón y del neutrón
$\sim 5 \times 10^5$	Masa en reposo del electrón
$\sim 1.4 \times 10^1$	Energía de ligadura del electrón en el átomo de hidrógeno

Figura 4: Escalas de energía

Usualmente, teniendo en cuenta la relación entre energía y masa en reposo,  $E = mc^2$ , las masas de las partículas se expresan en  $\frac{MeV}{c^2}$  o  $\frac{GeV}{c^2}$ .

Dado que trataremos con teorías relativistas, aparecerá a menudo en nuestros desarrollos la velocidad de la luz,  $3 \times 10^8 m/seg$ . Por tratarse de teorías cuánticas, donde el principio de incerteza desempeña un papel importante, otra constante que aparecerá a menudo es la constante de Planck. Es fácil recordar su valor como  $\hbar c = 200 MeV fm$ .

En física de partículas elementales, es muy común utilizar las llamadas unidades “naturales”. Para entender cómo se usan, recordemos que, si representamos por  $[L]$ ,  $[T]$  y  $[M]$  las unidades de longitud, tiempo y masa, las dimensiones de las distintas cantidades físicas pueden expresarse como combinaciones de ellas. Por ejemplo, si escribimos el módulo de la fuerza de Coulomb entre dos electrones como  $F = \frac{e^2}{d^2}$ , donde  $d$  es la distancia que los separa:

$$[e]^2 = [F][L]^2 = [E][L] = \frac{[M][L][L]^2}{[T]^2} = \frac{[M][L]^3}{[T]^2}$$

y la constante de estructura fina, definida como  $\frac{e^2}{\hbar c}$ , resulta ser adimensional, ya que  $[\hbar c] = [E][L]$ .

En particular, se tiene:

$$[c] = \frac{[L]}{[T]} \quad [\hbar] = \frac{[M][L]^2}{[T]}$$

### I.3 CÓMO SE PRODUCEN PARTÍCULAS?

---

Utilizar unidades “naturales” consiste en tomar  $\hbar = c = 1$  para realizar los cálculos y recuperar luego las unidades correctas multiplicando por las potencias necesarias de  $\hbar$  y de  $c$ . Está claro de lo anterior que, cuando se calcula en unidades naturales, se tiene que  $[L] = [T]$  y  $[M] = [L]^{-1}$ . Obsérvese que, en unidades naturales  $[E] = [M]$ . Por eso, las masas de las partículas suelen expresarse en MeV o GeV.

A menudo, cálculos simples, basados en consideraciones referentes a unidades características de un problema, permiten estimar el orden de magnitud de cantidades de interés. El siguiente (tomado de la referencia [5]) explica por qué, al estudiar partículas elementales, puede despreciarse la fuerza gravitatoria frente a la electromagnética.

El valor absoluto de la energía gravitatoria entre dos electrones puede escribirse

$$E_g = \frac{Gm_e^2}{r},$$

donde  $G = 6,673 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} seg^{-2}$  es la constante gravitatoria universal y  $r$  es la distancia que separa a los dos electrones.

El valor absoluto de la energía coulombiana entre las mismas partículas está dada por

$$E_{em} = \frac{e^2}{r}.$$

Como ya vimos, en este último caso, puede definirse la constante adimensional  $\alpha_{em} = \frac{e^2}{\hbar c}$ , llamada constante de estructura fina, cuyo valor es  $\alpha_{em} \sim \frac{1}{137}$ . Si, por analogía, definimos una constante adimensional para la interacción gravitatoria como  $\alpha_g = \frac{Gm_e^2}{\hbar c}$ , al reemplazar el valor numérico de la masa del electrón, encontramos que  $\alpha_g \sim 10^{-44}$ , más de cuarenta órdenes de magnitud menor que la constante de estructura fina. Ciertamente es que hemos elegido hacer el cálculo para el electrón, que es muy liviano. Pero nótese que, incluso para los mediadores de la interacción electrodébil, cuya masa es unas  $10^5$  veces mayor que la del electrón, la interacción gravitatoria sigue siendo despreciable frente a la electromagnética.

### I.3. Cómo se producen partículas?

Información complementaria muy útil para esta sección puede encontrarse en:

<http://www.auger.org/>

<http://www.cnea.gov.ar/xxi/reactores/RA1.asp>

<http://public.web.cern.ch/public/>

En particular, la página del CERN incluye un link destinado al público infantil y juvenil.

Los experimentos, tanto en Física Nuclear como en Física de Partículas Elementales, son esencialmente de dos tipos: choques entre partículas o desintegraciones. Pero, cómo se producen esas partículas que luego colisionarán o se desintegrarán? Producir electrones y protones es una cosa relativamente simple, visto que son constituyentes estables de la

materia que nos rodea. Para producir electrones, basta calentar un trozo de metal. Si se quiere un haz de electrones, basta colocar una placa cargada con una ranura cerca del lugar donde se producen. Los electrones que pasen a través de la placa serán nuestro haz de electrones. Un haz así producido es el paso inicial en la construcción de un tubo de rayos catódicos, como el tubo de un televisor o un osciloscopio, y también es la primera pieza en un acelerador de electrones.

Para producir protones basta con ionizar hidrógeno (eliminar el electrón de cada átomo). Si se bombardea un tanque de hidrógeno con partículas muy energéticas, los electrones son eliminados por las partículas incidentes. Un tanque de hidrógeno es, en realidad, un tanque de protones.

Pero otras partículas menos usuales provienen, usualmente, de tres fuentes alternativas.

#### I.3.1. Rayos cósmicos

Aquí, la naturaleza hace el trabajo por nosotros. La atmósfera terrestre es permanentemente bombardeada por partículas de gran energía (principalmente protones) que provienen del espacio exterior. La fuente precisa de estas partículas está aún en estudio. Pero, cuando golpean átomos en las capas más externas de la atmósfera, esas partículas producen lluvias de partículas secundarias (principalmente muones para cuando llegan a nivel de la tierra), que llueven sobre nosotros permanentemente. Como fuentes de partículas los rayos cósmicos tienen dos virtudes: son gratis y pueden alcanzar enormes energías, muy superiores a las que se alcanzan en laboratorio. Pero tienen dos desventajas: la cantidad de ellas que golpea, por unidad de tiempo, un detector de tamaño razonable es muy pequeña y, además, son completamente incontrolables. Ni siquiera se conoce con precisión cómo se producen los más energéticos. Así, los experimentos con rayos cósmicos requieren mucha paciencia y buena suerte. Argentina participa en el experimento sobre rayos cósmicos llamado Observatorio Pierre Auger (ver dirección de la página al comienzo de esta Introducción), cuya área de detección se encuentra en Malargüe, Mendoza. Este experimento está destinado a aportar datos que ayuden a comprender el origen de los rayos cósmicos.

#### I.3.2. Reactores nucleares

Cuando un núcleo radiactivo se desintegra, emite una variedad de partículas tales como neutrones, neutrinos, rayos  $\alpha$  (núcleos de He, que son estados ligados de dos protones y dos neutrones), rayos  $\beta$  (electrones o positrones) y rayos  $\gamma$  (fotones).

#### I.3.3. Aceleradores de partículas

Comenzando con electrones o protones, se los acelera a grandes energías y se los hace incidir sobre un blanco. Mediante arreglos adecuados de imanes y absorbentes se puede seleccionar, entre las partículas salientes luego de la colisión, la especie que se

### I.3 CÓMO SE PRODUCEN PARTÍCULAS?

---

quiere estudiar. Actualmente, es posible generar de este modo haces secundarios muy intensos de positrones, muones, piones, kaones, antiprotones y neutrinos que pueden, a su vez, hacerse incidir sobre otro blanco. Incluso, las partículas estables y sus antipartículas (electrones, positrones, protones y antiprotones) pueden almacenarse en anillos gigantes de almacenamiento, donde circulan a velocidades altísimas y continúan acelerándose, para extraerlas y usarlas en el momento requerido. De estos aceleradores, el más notorio en la actualidad es el LHC (Large Hadron Collider), en el CERN, Ginebra, Suiza. Estudiaremos los distintos tipos de aceleradores en breve.

Además, los aceleradores permiten generar haces de partículas que, al chocar, exploran regiones de muy corta escala y originan nuevas partículas. En general, cuanto mayor sea la masa de la partícula que quiere producirse, mayor será la energía de la colisión requerida. Esta es la razón por la cual, históricamente, se detectaron primero las partículas más livianas.

En efecto, de nuestro breve repaso de la Relatividad especial, recordemos que

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + M^2 c^4 \geq M^2 c^4.$$

Por lo tanto, para producir una partícula de masa  $M$ , se necesita acelerar haces hasta energías  $E \geq M c^2$ , que puedan transferirse al blanco y estar disponibles para la creación de tales partículas.

A medida que la tecnología fue avanzando, ha sido posible alcanzar energías siempre crecientes. Actualmente, la partícula más pesada que se ha detectado ha sido el quark top, con una masa mayor que 173 veces la masa del protón ( $M_t c^2 = 173 GeV$ ,  $M_p c^2 = 938 MeV$ ). Hasta el presente, no sabemos si existe algún límite superior para las masas posibles, aunque se sospecha que la llamada masa de Planck (ver problemas al final de la sección para su definición, basada en consideraciones de análisis dimensional), a partir de la cual se requiere una descripción cuántica de la gravitación,

$$M_P = 2,43 \times 10^{18} \frac{GeV}{c^2},$$

podría ser ese límite. Evidentemente, la forma última de saber si existe algún límite es verificarlo experimentalmente y requiere conseguir energías altísimas (las energías alcanzadas en el CERN son del orden de  $10 TeV$ , lo cual está muchos órdenes de magnitud por debajo de la correspondiente a la masa de Planck).

Además de tratar de detectar partículas más masivas, hay otra razón por la cual se realizan experimentos a energías cada vez más altas: a mayor energía pueden verse más detalles, según predice la mecánica cuántica. En efecto, la longitud de onda de de Broglie de una partícula está dada por  $\lambda = \frac{h}{p}$ , donde  $p$  es el valor absoluto de su impulso espacial. La llamada longitud de onda de de Broglie reducida es  $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{h}{p}$ .

En general, como ocurre en óptica, para una partícula incidente con cierta longitud de onda de de Broglie, se explorarán regiones del mismo orden de magnitud. Para explorar regiones de dimensión  $d$  se requiere transferir una cantidad de movimiento (el principio de incerteza,  $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ , lo justifica):

$$p \sim \frac{\hbar}{d}.$$

### I.3 CÓMO SE PRODUCEN PARTÍCULAS?

Esas regiones serán más pequeñas cuanto mayor sea la energía de las partículas que chocan y, por lo tanto, el impulso transferido. Para acelerar las partículas incidentes se utilizan, como ya mencionamos, campos electromagnéticos.

La forma más directa de acelerar partículas hasta energías altas consiste en usar un campo eléctrico, de modo que  $\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}}$ , o bien,  $E = Fd = qV$ , donde hemos considerado que el campo eléctrico  $\mathcal{E} = \frac{V}{d}$  se mantiene constante. El ejemplo más simple de un acelerador de electrones es el tubo de rayos catódicos de un televisor. Por supuesto, todo el sistema debe estar situado en el vacío. De lo contrario, las partículas perderían energía al chocar con las moléculas de aire. Además, alcanzar una diferencia de potencial del orden necesario para que la energía de la partícula alcance los  $MeV$  o, peor aún,  $GeV$  en una sola etapa es imposible, porque es sabido que ocurren rupturas a unos pocos  $keV$ . Por lo tanto, se requirió mucho ingenio para efectuar sucesivas aceleraciones y llegar a las energías deseadas.

La historia de los aceleradores de partículas, empieza con el de de Cockcroft-Walton (1932), así llamado en honor a quienes lo usaron para provocar la primera fisión nuclear (aunque ya había sido propuesto como multiplicador de voltaje por Greinacher, en 1919) y el de van de Graaff (1933). Con ellos se alcanzaban energías del orden de 500 keV para protones y fueron los primeros usados en física nuclear.

La figura 5 muestra un esquema del circuito que caracteriza un multiplicador de voltaje de Cockcroft-Walton: Cuando el potencial AC original, alcanza un pico negativo, el primer diodo deja pasar corriente y se carga el primer capacitor. Cuando la señal cambia de signo, el primer diodo se cierra y se abre el segundo. Esta vez, la corriente fluye tanto desde la fuente AC como desde el primer capacitor, así que el segundo se carga al doble. Y así siguiendo, el voltaje se duplica en cada etapa.

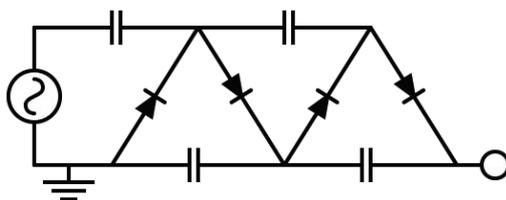


Figura 5: Esquema del acelerador de Cockcroft-Walton

En el acelerador de van de Graaff (para más información, ver <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elect>) el potencial se multiplica transportando cargas hacia un capacitor (ver figura 6).

A fin de obtener mayores voltajes se usan los llamados aceleradores en tándem, que son sucesivos van de Graaff y, por lo tanto, alcanzan energías algo superiores, aunque siempre del orden requerido en experimentos de física nuclear. Un ejemplo de estos aceleradores en tándem es el TANDAR, ubicado en el Centro Atómico Constituyentes de la CNEA (ver la dirección web sugerida al comienzo de I.3).

A estos aceleradores siguieron los llamados LINACS, o aceleradores lineales. En estos aceleradores, el haz de partículas se inyecta a lo largo del eje. Dentro de los cilindros, el campo eléctrico es siempre nulo. Entre cilindros, hay un campo alterno. Supongamos que

### I.3 CÓMO SE PRODUCEN PARTÍCULAS?

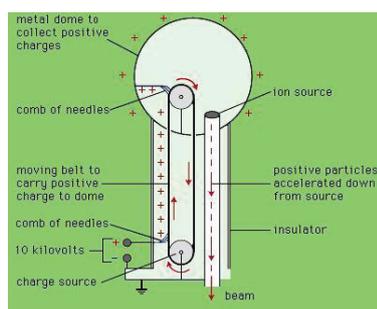


Figura 6: Esquema del acelerador de van de Graaff

una partícula llega a la región entre dos cilindros cuando el campo es máximo. Sufrirá, entonces una primera aceleración. La longitud del siguiente cilindro se elige de modo que la partícula acelerada llegue al final del próximo cilindro cuando el campo allí es otra vez máximo, duplicando así su aceleración. Y el proceso continúa, con cilindros más largos a medida que la partícula se aproxima al blanco y va teniendo mayor aceleración (ver problema al final de esta Introducción. Un esquema de este tipo de aceleradores aparece en la figura 7.

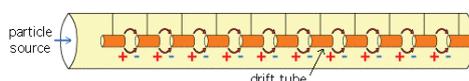


Figura 7: Esquema del LINAC

Obsérvese que, para una partícula que ha alcanzado una velocidad  $v$ , la longitud del cilindro debe ser tal que  $L = v\tau = \frac{v}{\nu}$ , donde  $\tau$  es el período y  $\nu$  es la frecuencia alterna. Para cuando la partícula alcanza velocidades relativistas, hacen falta frecuencias altísimas para tener aceleradores de una longitud aceptable. El acelerador lineal más largo existente (3km) es el de Stanford (SLAC) y es capaz de acelerar electrones hasta energías de unos 50 GeV. Alcanzar energías del orden del TeV requeriría un LINAC de unos 60 km de longitud y los costos serían inmensos. Eso explica por qué, para ese fin, se han adoptado aceleradores circulares. La primera propuesta en este sentido fue el ciclotrón (de 1930).

Los aceleradores circulares usados actualmente son refinamientos de esa idea. Por ejemplo, en el sincrotrón, la partícula es obligada a mantener una trayectoria circular por un campo magnético y, en ciertas regiones lineales, es acelerada por un campo eléctrico en el rango de las radio frecuencias. Sucesivos pasos por estas regiones imprimen a las partículas sucesivas aceleraciones, hasta alcanzar velocidades relativistas. Sin embargo, los aceleradores circulares tienen una desventaja: las partículas aceleradas pierden más energía por radiación que en un acelerador lineal. Esa radiación, conocida como radiación de sincrotrón, es útil para ser usada en otras aplicaciones, tales como el estudio de

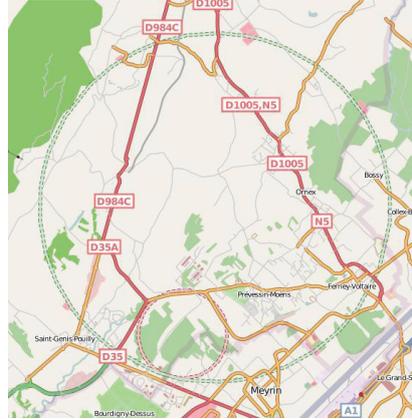


Figura 8: El LHC en el CERN

propiedades de materiales de interés tecnológico. La potencia radiada por una partícula de carga  $q$  y energía  $E$  en órbita circular de radio  $R$  es:

$$P \sim \frac{2q^2 c}{3R^2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^4,$$

donde  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  y se ha tomado el límite ultrarrelativista  $\beta \sim 1$ .

Obsérvese, en primer lugar, que la pérdida por radiación es mucho menor para protones (debido a su masa mucho mayor) que para electrones.

Por otra parte, la energía disponible para crear partículas en la colisión es mucho mayor si se produce una colisión entre partículas que viajan en sentidos opuestos que si una partícula acelerada choca contra otra en reposo en el laboratorio. En efecto, en el primer caso, el sistema de laboratorio coincide con el sistema de centro de masa, en el cual  $\vec{P} = \vec{0}$  y, por lo tanto, toda la energía de ambos haces está disponible para la creación de nuevas partículas. Por ejemplo, en el LHC, se almacenan protones viajando en sentidos opuestos en un mismo anillo y se los hace colisionar en ciertos sectores, consiguiendo así, en el sistema de centro de masa (que coincide con el de laboratorio), energías del orden de la decena de TeV.

La figura 8 muestra un plano del anillo acelerador del LHC, que tiene un perímetro de 27 km, y está construido a 170 m. de profundidad, por debajo de la frontera entre Suiza y Francia (Consultar la página web sugerida al comienzo de I.3).

## I.4. Cómo se detectan partículas?

Los primeros experimentos de dispersión de partículas elementales identificaban partículas utilizando las cámaras de niebla (1894) y de burbujas (1894). La cámara de niebla se

## *1.4 CÓMO SE DETECTAN PARTÍCULAS?*

---

basaban en el registro de la huella dejada por el pasaje de las partículas cargadas al ionizar vapor de agua sobreenfriado. El estado metaestable se alcanzaba mediante la expansión adiabática realizada moviendo un pistón. En esas condiciones, los iones resultantes del paso de las partículas cargadas actuaban como semillas de condensación, alrededor de las cuales se iban formando gotas, que marcaban la trayectoria, circular debido a la presencia de un campo magnético perpendicular. Una cámara fotográfica registraba dicha trayectoria. Las cámaras de burbujas reemplazaron el vapor de agua por líquido sobrecalentado (en general, hidrógeno líquido), que hervía al paso de las partículas ionizantes. La figura 9 muestra una de estas cámaras. Estos detectores fueron reemplazados, luego, por cámaras multicable y cámaras de chispas.

Los experimentos actuales combinan distintos tipos de detectores, basados en equipos de estado sólido. De los varios detectores presentes en el CERN, dos están dedicados, especialmente, a la verificación de la existencia del bosón de Higgs y la medida precisa de los eventos en los cuales el mismo participa: ATLAS (A Toroidal LHC Apparatus) Y CMS (Compact Muon Solenoid). Ellos combinan tres tipos de detectores, dispuestos en sucesivas capas que rodean al haz:

- La capa más interna está formada por Reveladores de Trayectorias (Tracking Devices): permiten medir cómo se curva la trayectoria de cada partícula luego del choque, debido a la presencia de un poderoso campo magnético en la dirección del haz y determinar, en consecuencia, el signo de su carga y su cantidad de movimiento. En el actual colisionador se usan, con este fin, dispositivos de estado sólido (Pixel Detectors, Semiconductor Trackers y Transition Radiation Trackers) que envían señales a las computadoras cada vez que detectan el paso de la partícula. Todos ellos son capaces de medir posiciones con precisión de un centésimo de milímetro. Es la computadora la que reconstruye la trayectoria. Los dos primeros permiten determinar el signo de la carga y la cantidad de movimiento. El tercero permite la completa determinación de la carga, al medir la radiación emitida cuando la partícula atraviesa la frontera entre dos medios distintos. Conocidos carga y cantidad de movimiento, la posterior determinación de la energía establecerá su masa y caracterizará por completo a la partícula en cuestión. La medición de energías se realiza en las capas siguientes, usando Calorímetros Electromagnéticos, de Hadrones y de Muones.
- Los primeros miden la energía depositada por fotones, electrones y positrones. Los calorímetros electromagnéticos determinan las energías de electrones, positrones y de los pares electrón-positrón originados en los fotones. Una primera capa, de vidrio de plomo, crea una avalancha de pares. Luego, se mide la energía emitida en forma de radiación. Esto completa la identificación de los electrones, positrones y fotones producidos en los choques.
- La capa siguiente la forman los Calorímetros de Hadrones: miden el ritmo de depósito de energía de las partículas hadrónicas (formadas por quarks), como protones, neutrones, piones, y otras, en un medio altamente absorbente, hasta que las

mismas alcanzan el reposo. Toneladas de hierro se usan con este fin y, además, sirven para formar el electroimán que genera el campo magnético responsable de curvar las trayectorias de las partículas en la capa más interna del anillo de colisión.

- Finalmente, aparecen las Cámaras de Muones, que forman la capa más externa del aparato ya que los muones, al ser más masivos que otras partículas, pasan a través de grandes espesores de material sin gran interacción con el mismo.



Figura 9: Cámara de burbujas del Fermilab, Chicago



Figura 10: Foto de trayectorias en una cámara de burbujas

Como se ve en la figura 10, y ya anticipamos, las trayectorias seguidas por las partículas son, en general, circulares. Eso se debe a que la cámara se ubica entre los polos de un imán gigantesco. En el campo magnético  $\vec{B}$ , una partícula de carga  $q$  y velocidad  $\vec{v}$  describe una órbita circular, cuyo radio está dado por la famosa fórmula del ciclotrón.

Hagamos, por ahora, un cálculo no relativista (ver problema al fin de esta sección para el caso relativista). En general, las partículas que nos interesan se mueven en los detectores a velocidades relativistas. De todos modos, este cálculo nos dará una idea. Debido al campo magnético, la partícula sufre una fuerza  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Dado que  $\vec{B}$  es perpendicular a la órbita y  $\vec{v}$  es tangente a la misma, la fuerza de Lorentz es central. Usando la segunda ley de Newton, tal fuerza produce una aceleración, también centrípeta, cuyo módulo está dado por  $a_N = \frac{|q|vB}{m}$ , donde  $m$  es la masa de la partícula (en esta

## I.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

expresión y en las que siguen, hasta el fin de esta sección, todas las magnitudes vectoriales aparecen en módulo). Recordando que  $a_N = \frac{v^2}{R_C}$ , se tiene para el radio de ciclotrón, cuando la partícula afectada por el campo magnético se mueve a velocidades pequeñas comparadas con la de la luz,

$$R_C = \frac{m v}{|q| B}.$$

En cuanto a la velocidad angular, su módulo es  $\omega = \frac{v}{R_C} = \frac{|q| B}{m}$  y la frecuencia  $\nu_c = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|q| B}{2\pi m}$  se conoce como la frecuencia de ciclotrón.

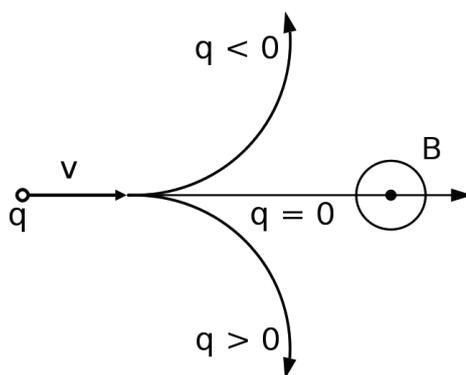


Figura 11: Fuerza de Lorentz

En el caso relativista, el radio de la trayectoria resulta corregido según

$$R_C = \frac{m \gamma v}{|q| B},$$

con  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  y  $c$  la velocidad de la luz. Si se mide el radio de la trayectoria y se conoce el campo magnético, se determina, entonces, el cociente entre el módulo de la cantidad de movimiento relativista y la carga. El sentido en que se recorre la trayectoria permite, también, conocer el signo de su carga. Volveremos sobre este punto al estudiar el experimento de detección del positrón.

### I.5. Ejercicios propuestos

1. Demuestre que el intervalo,  $s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$  es un invariante de Lorentz. (Utilice una transformación de Lorentz como la que se consideró en la clase teórica).
2. Mediante consideraciones dimensionales, obtenga una expresión para la masa de Planck como producto de potencias arbitrarias de  $\hbar$ ,  $c$  y  $G$  (proponga  $m_P = c^\alpha G^\beta \hbar^\gamma$

y determine los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ ). Recuerde que:  $[c] = [L][T]^{-1}$ ,  $[G] = [M]^{-1}[L]^3[T]^{-2}$  y  $[\hbar] = [M][L]^2[T]^{-1}$ .

3. Un análisis basado en consideraciones dimensionales permite obtener, en forma aproximada, el radio de la órbita correspondiente al nivel fundamental del átomo de hidrógeno, conocido como radio de Bohr, sin resolver la ecuación diferencial, como sigue:

a) Recordando que la energía cinética del electrón es  $E_K = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$  y la energía potencial es  $-\frac{\alpha}{r}$ , donde  $\alpha$  es la constante de estructura fina, escriba la energía total del electrón usando que, por consideraciones dimensionales,  $|\vec{p}| \sim \frac{1}{r}$ .

b) Determine el radio que minimiza la expresión obtenida, para la energía, en el inciso a). Así, obtendrá el radio aproximado de la primera órbita, expresado en  $MeV^{-1}$ .

c) Multiplique su resultado del inciso b) por las potencias de  $c$  y  $\hbar$  necesarias para expresarlo en metros. Compare el valor así obtenido con el valor exacto del radio de Bohr ( $5,29 \times 10^{-11}m$ ).

4. En la siguiente página:

<https://en.wikipedia.org/wiki/Linear-particle-accelerator>

puede encontrar una animación que muestra el funcionamiento de un acelerador lineal (linac). En tales aceleradores, la fuente de partículas cargadas y los cilindros huecos pares están conectados a un electrodo del potencial eléctrico alterno, de amplitud  $V_0$ . Los cilindros impares están conectados al otro electrodo. La frecuencia del potencial se ajusta de modo que la partícula acelerada llegue a una región entre dos cilindros exactamente cada medio período del potencial. De ese modo, la partícula sufrirá sucesivas aceleraciones en las regiones entre cilindros y mantendrá una velocidad constante en el interior de los mismos. Suponiendo que las partículas aceleradas tienen carga  $q > 0$  y masa  $m$ , que su velocidad inicial (al salir de la fuente) es nula, que inicialmente los cilindros impares están conectados al electrodo positivo y que las velocidades alcanzadas están muy por debajo de la de la luz, demostrar que:

a) La velocidad de la partícula en el  $n$ -ésimo cilindro es  $\sqrt{\frac{4nqV_0}{m}}$ ;

b) Si  $L_n$  es la longitud del  $n$ -ésimo cilindro, la misma debe ser tal que  $\frac{L_n}{L_1} = \sqrt{n}$ ;

c) El período del potencial alterno debe ser  $T = L_1 \sqrt{\frac{m}{qV_0}}$ .

d) Calcular la frecuencia de un acelerador lineal de cinco etapas, en el cual  $L_1 = 10cm$ , usado para acelerar iones de carga  $q = 2 \times 1,6 \times 10^{-19}C$  (dos unidades de carga eléctrica) y masa  $m = 4 \times 1,67 \times 10^{-27}kg$  (cuatro unidades de masa atómica). Suponer que la amplitud del potencial es  $V_0 = 100V$ .

## 1.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

---

5. a) Supongamos que una partícula de masa  $m$  choca contra un blanco de la misma masa, que se encuentra en reposo en el sistema de laboratorio, para dar lugar a una nueva partícula de masa  $M$ . Sólo una fracción de la energía de la partícula incidente está disponible para crear una nueva partícula. Demostrar que la energía disponible es  $Mc^2 = 2mc^2 \sqrt{1 + \frac{K}{2mc^2}}$ , donde  $K$  es la energía cinética de la partícula incidente. Este resultado es una de las razones por las cuales, en la mayoría de los aceleradores se estudian colisiones frontales (notar que este tipo de colisiones sólo pueden ser obtenidas en aceleradores circulares). Suponer, entonces, una colisión frontal de dos partículas de igual masa  $m$ , e igual energía cinética; demostrar que la energía total disponible es  $Mc^2 = 2mc^2(1 + \frac{K}{2mc^2})$ .

b) En un colisionador electron-positrón, cada partícula es acelerada hasta alcanzar, en el sistema de referencia del laboratorio, una energía cinética  $K$ . Cuando se produce un choque frontal entre un electrón y un positrón, ambos con la energía antes mencionada, cuál es el mínimo valor de  $K$  compatible con la detección, después del choque, de un bosón  $Z^0$  en reposo (la masa de este bosón intermediario es de  $90 \text{ GeV}$ )?

c) Hasta qué energía debería acelerarse el positrón si quisiera producirse un  $Z^0$  como consecuencia de su choque con un electrón en reposo? Estaría en reposo el  $Z^0$  producido?

Sugerencia: utilice la conservación de energía e impulso durante la colisión y recuerde que  $E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4$ .

6. En el marco de la relatividad especial, la fuerza actuante sobre una partícula cargada sometida a un campo magnético (caso de campo eléctrico nulo de la fuerza de Lorentz) está dada por  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Sabiendo que el impulso espacial de la partícula es  $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ ,

a) Demostrar que el módulo de la velocidad angular (llamada de Larmor o del ciclotrón) está dado por  $\omega = \frac{q|\vec{B}|}{\gamma m}$ , donde  $m$  es la masa de la partícula y  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ .

b) Cuál es el módulo del vector cantidad de movimiento de una partícula de carga igual a la carga del electrón sabiendo que, en una cámara de burbujas donde actúa un campo magnético de  $|\vec{B}| = 2T$ , describe una órbita de radio  $R = 33,4 \text{ cm}$

# **Parte II**

## **Evolución histórica**



## II.1. Partículas “elementales” hasta 1930

Además de las referencias ya citadas, para esta sección es muy útil (aunque levemente desactualizado) [6].

La noción de elemento existió desde las épocas de la Grecia antigua, cuando toda la materia se creía compuesta por cuatro elementos: aire, agua, fuego y tierra, que se combinaban en distintas proporciones para dar origen a diversos objetos. Pero, para los griegos, estos elementos estaban distribuidos en forma continua y no concentrados en regiones pequeñas del espacio. Demócrito fue el primero en utilizar la palabra átomo, aunque en un sentido vago.

La definición de elemento dada muchos años después por Robert Boyle (1627-1691), el padre de la química, es, esencialmente, la misma que hemos dado nosotros para una partícula elemental. Boyle dijo que “los elementos son ciertos cuerpos primitivos y simples que no están formados por otros cuerpos, ni unos de otros, y que son los ingredientes de que se componen inmediatamente y en que se resuelven en último término todos los cuerpos perfectamente mixtos”.

A fines del siglo XIX, era sabido que toda la materia está compuesta por ciertos “elementos” (que hoy llamamos átomos). Sin embargo, el rápido aumento en la cantidad de átomos, con propiedades que se repiten periódicamente, era una indicación de que esos átomos debían tener, a su vez, una estructura interna en lugar de ser indivisibles. Así lo comprendió Dmitri Mendeleev (1834-1907), que los ordenó por orden creciente de masa atómica, en una primera versión de su famosa tabla, que se muestra en la figura 12. Al hacerlo, encontró que cada ocho elementos se repetían las propiedades químicas. Aunque, como puede verse en la misma figura, existían huecos en algunos sitios (observar los huecos entre el Ca y el Ti y entre el Zn y el As). Mendeleev postuló, en base a la regularidad encontrada, que los elementos correspondientes a esos huecos debían existir y, en efecto, se descubrieron algún tiempo después.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
R <sub>2</sub> O	RO	R <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	RH <sub>4</sub> RO <sub>3</sub>	RH <sub>3</sub> R <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	RH <sub>2</sub> RO <sub>3</sub>	RH R <sub>2</sub> O <sub>7</sub>	RO <sub>4</sub>
H							
Li	Be	B	C	N	O	F	
Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	
K	Ca		Ti	V	Cr	Mn	Fe Co Ni
Cu	Zn			As	Se	Br	
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo		Ru Rh Pd
Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	
Cs	Ba	La	Hf	Ta	W		Os Ir
Au	Hg	Tl	Pb	Bi			Pt

Figura 12: La tabla periódica de Mendeleev, en su forma original

Ahora sabemos que, efectivamente, esa regularidad se debe a las propiedades eléctricas del átomo, que quedan determinadas por la carga eléctrica de su núcleo (idéntica, en

valor absoluto, a la carga de sus electrones). Un conocimiento del interior del átomo más acabado comenzó a obtenerse a inicios del siglo XX, con los experimentos de Joseph John Thomson (1856-1940) y de Ernest Rutherford (1871-1937).

Puede decirse que la búsqueda de partículas elementales comenzó en 1897, cuando J.J. Thomson identificó el electrón. Thomson sabía que los rayos catódicos emitidos por un filamento caliente podían ser deflectados por un campo magnético, lo cual indicaba que tenían carga. Más precisamente, el sentido de la curvatura requería que la carga fuese negativa. Haciendo pasar el haz por campos eléctrico y magnético cruzados, Thomson determinó la velocidad de las partículas y el cociente de su carga sobre su masa. Este cociente resultó ser enorme, indicando que, o bien la carga de las partículas era inmensa o su masa muy pequeña. Evidencia generada por otros experimentos mostró que el caso era el segundo ( $m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ; medida en eV es  $m_e \sim 0,5 \text{ MeV}$ ). Thomson comprendió, correctamente, que los electrones eran constituyentes elementales de los átomos. Pero el electrón tiene carga negativa ( $-e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ), mientras los átomos son eléctricamente neutros. La pregunta era, entonces, dónde estaba la carga positiva equilibrante.

Thomson había sugerido un modelo del átomo en que los electrones eran como cerezas en una torta (el átomo), dentro de una masa de carga positiva. Pero Rutherford mostró con sus experimentos que los átomos están compuestos por un núcleo interno muy denso, rodeado por una nube de electrones. Efectivamente, en 1911, Rutherford hizo su mayor contribución a la ciencia, al descubrir el núcleo atómico. Había observado que, al bombardear una fina lámina de mica con partículas alfa (él mismo demostró, después, que eran núcleos de He) con energías del orden de  $1 \text{ MeV}$ , se obtenía una deflexión brusca de dichas partículas, como si chocaran con objetos de dimensión aproximada  $10^{-15} \text{ m}$ . Al retomar Geiger y Marsden estos experimentos, de modo más detallado, utilizando ahora una lámina de oro, confirmaron tal comportamiento y encontraron que algunas partículas alfa se desviaban, incluso, más de 90 grados. Rutherford lanzó entonces la hipótesis, que Geiger y Marsden confrontaron con los resultados de su experimento, según la cual en el centro del átomo debía haber un núcleo, que contuviera casi toda la masa y toda la carga positiva del átomo y que, de hecho, los electrones debían determinar el tamaño del átomo. Rutherford llamó protón al núcleo del átomo más liviano (hidrógeno), cuya masa es de  $\sim 930 \text{ Mev} \sim 2 \times 10^3 m_e$  y propuso un modelo en que el electrón orbita alrededor del protón. Este modelo planetario había sido sugerido en 1904 por un físico japonés, Hantaro Nagaoka, aunque había pasado inadvertido. Se le objetaba que, en ese caso, los electrones tendrían que emitir radiación al girar alrededor del núcleo central (en forma similar a la radiación de sincrotrón) y, en consecuencia, al perder energía, el sistema no podía ser estable. Los resultados de Rutherford demostraron que el modelo planetario era, sin duda, el adecuado, puesto que permitía prever con exactitud la sección eficaz de difusión de las partículas alfa en función del ángulo, aunque contradijera las expectativas de la Electrodinámica clásica. Las últimas objeciones teóricas se desvanecieron con la aplicación de los principios de la teoría cuántica, y la adaptación que, en 1914, hizo Niels Bohr del modelo de Rutherford a la Mecánica Cuántica, lo que sirvió para justificar la estabilidad del átomo de Rutherford-Bohr.

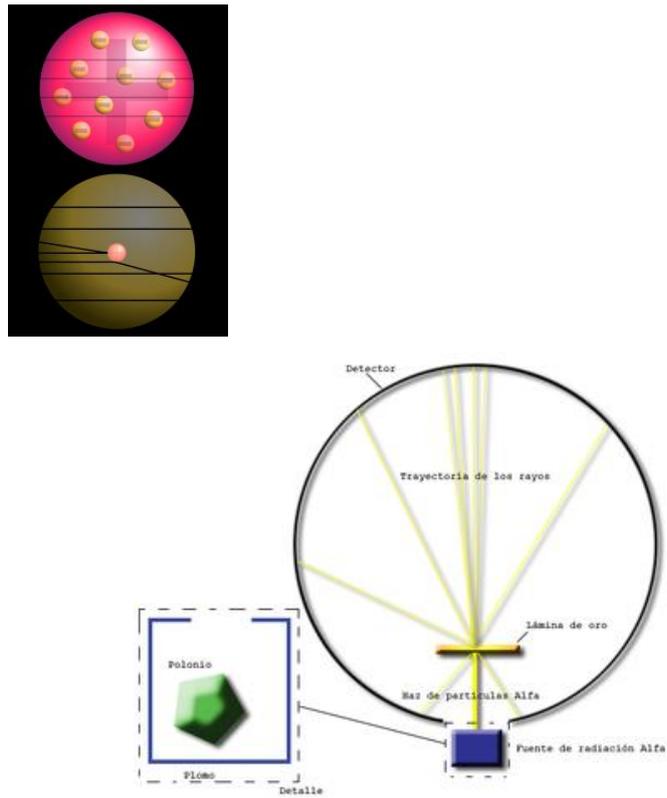


Figura 13: Experimento de Rutheford

Pero, rápidamente, se comprendió que los restantes átomos no pueden estar compuestos de igual número de protones y electrones (condición necesaria para que sea eléctricamente neutro) y nada más. Por ejemplo, el átomo de helio ( ${}^4\text{He}$ ) requiere dos electrones, pero tiene una masa que es cuatro veces la del átomo de hidrógeno. De dónde provenía, entonces, la masa extra?

En 1932, con el descubrimiento del neutrón, realizado por James Chadwick (1891-1974), se resolvió ese problema: el neutrón tiene la misma masa que el protón, pero no tiene carga. Eso explica la estructura del  ${}^4\text{He}$ , si se admite que el núcleo contiene, además de los dos protones necesarios para ser neutro, dos neutrones que no alteran la carga, pero duplican su masa. No siempre el número de protones en un núcleo coincide con el número de neutrones en el mismo. En general, en los núcleos más pesados, el número de neutrones es mucho mayor que el número de protones y puede variar, dando origen a los llamados isótopos: núcleos con la misma cantidad de protones (llamada el número atómico)  $Z$  y, por lo tanto, la misma carga  $+Ze$ , pero distinto número de neutrones  $N$  y, por lo tanto, distinta masa  $A = N + Z$  ( $A$  se conoce como el número de masa). Por ejemplo, el deuterio es un isótopo del hidrógeno: como este último, tiene  $Z = 1$ , pero su número de masa es  $A = 2$ .

A esta altura del siglo XX, hacia 1932, la respuesta a nuestra primera pregunta estaba tan clara como nunca lo había estado: toda la materia parecía estar compuesta por electrones, protones y neutrones que eran, junto con el fotón (del cual hablaremos en el párrafo siguiente), las únicas partículas requeridas para explicar las observaciones realizadas hasta entonces. De ellas, las partículas cargadas participaban de la interacción electromagnética. Aparte de esta interacción, sólo se conocía la interacción gravitatoria, de intensidad despreciable al tratar problemas a escala subatómica. Pero esta situación iba a durar poco. Antes de comentar sobre la necesidad de incorporación de otras partículas al modelo, detengámonos un poco en el fotón, del que no hemos dicho nada aún.

El fotón es, en cierto modo, distinto de las otras tres partículas de las que hemos hablado hasta ahora, dado que no forma parte de los objetos materiales que nos rodean. En efecto, el fotón es considerado el mediador de las interacciones electromagnéticas. Su historia comienza con el estudio, por Max Planck (1858-1947), de la radiación del cuerpo negro, en 1900. Planck trataba de explicar la radiación emitida por un cuerpo caliente, que se resistía a ser explicada por la Mecánica Estadística usual, que predecía la llamada “catástrofe ultravioleta” (según la Mecánica Estadística clásica, la potencia total radiada por un cuerpo negro resultaba ser infinita). Al tratar de explicar los resultados experimentales, Planck propuso que la radiación electromagnética está cuantizada, y que es producida sólo en “paquetes” de energía  $E = \nu h$ , donde  $h$  es la llamada constante de Planck. Planck no explicó el origen de tal cuantización, pero eso lo hizo Albert Einstein (1879-1955), en 1905, al proponer que esta cuantización es una característica del campo electromagnético: la radiación consiste en cuantos de energía. Por ejemplo, cuando la radiación incide sobre un metal, parte de esa energía se transfiere a los electrones,

que abandonan la superficie del metal. La máxima energía que dichos electrones pueden tener es independiente de la intensidad de la luz: si la luz es más intensa, se extraerán más electrones, pero su máxima energía sólo dependerá del “color” (longitud de onda o, equivalentemente, frecuencia) de la luz. Este hecho fue definitivamente demostrado en el experimento realizado por Arthur Compton (1892-1962), en 1923. En este experimento, Compton verificó que las longitudes de onda de la radiación incidente y saliente están relacionadas por:

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c(1 - \cos \theta), \quad (6)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la radiación incidente,  $\lambda'$  la de la radiación reflejada,  $\theta$  es el ángulo entre la radiación incidente y la reflejada y  $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$  es la llamada longitud de onda Compton del electrón. Esta es justamente la conclusión que se obtiene si se trata a la luz como una partícula incidente sin masa y se aplica la ley relativista de conservación del tetraimpulso, junto con  $p^\mu p_\mu = m^2$  y la expresión de Planck para las energías inicial y final del fotón. Haciendo eso (ver problemas al final de este capítulo), se tiene:

$$E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e \quad \vec{p}_\gamma + \vec{p}_e = \vec{p}'_\gamma + \vec{p}'_e$$

junto con  $E_\gamma = c p_\gamma = h\nu$ ,  $E'_\gamma = c p'_\gamma = h\nu'$  y  $E_e = m_e c^2$ , se obtiene (6).

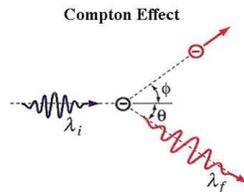


Figura 14: Diagrama del efecto Compton

A esa partícula sin masa, o cuanto de radiación electromagnética, llamamos el fotón. Su naturaleza se explica en forma más precisa cuando se estudian las interacciones electromagnéticas como una teoría de campos cuántica y relativista.

La figura 15 muestra el “modelo estándar”, tal como se lo entendía en el año 1932. Notemos que todas las partículas de materia tienen espín semientero ( $1/2$ ) y, en consecuencia, satisfacen la estadística de Fermi-Dirac (se las llama fermiones). El fotón (mediador de la interacción electromagnética), en cambio, tiene espín entero (1). En consecuencia, satisface la estadística de Bose-Einstein (se lo llama bosón).

## II.2 MÁS PARTÍCULAS “ELEMENTALES” (DESDE 1930 HASTA 1960)

		Materia	Interacción	Mediador
Á T O M O	N Ú C L E O	protón (p) m=1 GeV Q= +e s=1/2	electromagnética	fotón ( $\gamma$ ) m=0 GeV Q= 0 s=1
		neutrón (n) m=1 GeV Q= 0 s=1/2	-----	
		electrón (e) m=.5 MeV Q= -e s=1/2	electromagnética	fotón ( $\gamma$ ) m=0 GeV Q= 0 s=1

Figura 15: Modelo estándar en 1932

## II.2. Más partículas “elementales” (desde 1930 hasta 1960)

### II.2.1. El mesón pi y el muón

Por entonces (tercera década del siglo XX) todo parecía estar bajo control: tres partículas elementales de materia: electrón, protón y neutrón y dos interacciones fundamentales: electromagnética y gravitatoria parecían explicarlo todo. Incluso, al describir el mundo subatómico podía ignorarse la interacción gravitatoria, por ser muchísimo más débil que la electromagnética.

Al electrón se lo llamó, también, leptón (del griego, liviano) y a los nucleones, el protón y el neutrón, dos mil veces más pesados, se los llamó hadrones (del griego, pesado). Actualmente, la clasificación en leptones y hadrones ya no se basa en consideraciones acerca de las masas de las partículas, sino en los tipos de interacciones que sufren.

Pero existía una cuestión a la cual este “modelo estándar” no podía dar respuesta: en átomos con varios protones, ¿cómo hacían los protones para mantenerse unidos entre sí y con los neutrones, para formar el núcleo? Visto que todos los protones tienen la misma carga eléctrica y están muy próximos entre sí ( $\sim 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ), debía existir, entre ellos, una repulsión eléctrica muy grande. Qué fuerza los obligaba a permanecer unidos a tan cortas distancias como es el tamaño de un núcleo (algunos fm) sin que el núcleo explotara en mil pedazos? En un intento de responder esta pregunta, Hideki Yukawa (1907-1981) propuso, en 1935, la existencia de una fuerza entre protones y neutrones, debida a un potencial que se conoce con su nombre. Esta fuerza fue llamada, por entonces, fuerza fuerte; pero nosotros la llamaremos fuerza nuclear, porque veremos después que

## II.2 MÁS PARTÍCULAS “ELEMENTALES” (DESDE 1930 HASTA 1960)

no es una interacción fundamental, sino sólo el residuo, a bajas energías, de la verdadera fuerza fuerte, proveniente de la interacción entre quarks. Según Yukawa, la interacción nuclear estaba mediada por una partícula que llamó el mesón  $\pi$  o pión, cuya función en la teoría era similar a la del fotón en la Electrodinámica, aunque con una gran diferencia: debía tratarse de una partícula masiva para que la interacción nuclear resultase de corto alcance y no modificara la fenomenología de la física atómica, bien explicada por la electrodinámica.

En efecto, Yukawa propuso que la teoría de la interacción nuclear debía ser, como la Electrodinámica y la Gravitación, una teoría de campos. Pero es un hecho que, a distancias macroscópicas, no experimentamos más que fuerzas electromagnéticas y gravitatorias. Entonces, la fuerza nuclear debía ser una fuerza de muy corto alcance, a diferencia de las otras dos fuerzas conocidas por entonces, que tienen un alcance infinito. De esta condición, estimó que la masa del pión debía ser unas 300 veces la masa del electrón. De ahí proviene el nombre del mesón (masa intermedia entre leptón y hadrones).

La propuesta de Yukawa era una mera especulación hasta que dos grupos experimentales identificaron, en experimentos con rayos cósmicos realizados en 1937, dos partículas con características similares a las que debería tener la partícula de Yukawa. Pero existían algunas inconsistencias. Hubo que esperar hasta después de la segunda guerra (1947) para comprender que sólo una de esas partículas era, efectivamente, un mesón  $\pi$ . Pero la otra tenía características similares a las del electrón (no participaba en la interacción nuclear). A esta última se la conoce como partícula  $\mu$  o muón. Interactúa exactamente igual que el electrón y no participa de la interacción fuerte, por lo cual se lo incluye, en la actualidad, entre los leptones; como el electrón tiene espín  $1/2$ , pero su masa es unas 200 veces la masa del electrón.

Posteriores medidas mostraron que, además, existían tres tipos de mesones  $\pi$ , todos ellos bosones (espín entero), pero que participaban de distinto modo en la interacción electromagnética, según su carga electromagnética ( $\pi^+$ ,  $\pi^0$  y  $\pi^-$ ), donde los supraíndices tienen significado evidente.

### II.2.2. Antipartículas

La Mecánica Cuántica no relativista se estableció por completo en un lapso sorprendentemente corto: entre 1923 y 1926. Pero conciliar la Mecánica Cuántica con la Teoría de la Relatividad requirió mucho más tiempo y las contribuciones de muchos grandes físicos. El primer paso importante fue la propuesta, realizada por Paul Dirac (1902-1984) en 1927, de la ecuación que lleva su nombre para describir electrones libres cuya energía satisficiera la ecuación relativista  $E^2 - c^2 \vec{p}^2 = m^2 c^4$ . De esta ecuación resulta claro, debido al doble signo de la raíz cuadrada, que a cada solución con energía positiva debería corresponder otra con energía negativa. Pero, si fuese así, todos los electrones elegirían tener energías lo más negativas posibles y, al ocupar esos estados, emitirían una energía infinita. Para explicar por qué tal catástrofe no ocurre, fue necesario comprender que debía elaborarse una Teoría de Campos Cuántica Relativista (RQFT), sobre la cual hablaremos más adelante. Por ahora, lo importante para nosotros es que una teoría tal, permitía rein-

## II.2 MÁS PARTÍCULAS “ELEMENTALES” (DESDE 1930 HASTA 1960)

terpretar esas energías negativas asociándolas con una partícula distinta del electrón: su antipartícula, conocida como el positrón, con energía positiva. La RQFT prevé la existencia de una antipartícula por cada partícula conocida (aunque algunas partículas son sus propias antipartículas) que anotaremos con una barra encima. Por ejemplo, el positrón será anotado  $\bar{e}$ , la antipartícula del protón (antiprotón),  $\bar{p}$ , etcétera. Cada partícula y su antipartícula se caracterizan por tener, entre otras cosas, cargas eléctricas opuestas. En realidad, veremos más adelante que existen otros números cuánticos aditivos que caracterizan las propiedades de las partículas y todos ellos tienen signo opuesto para las correspondientes antipartículas.

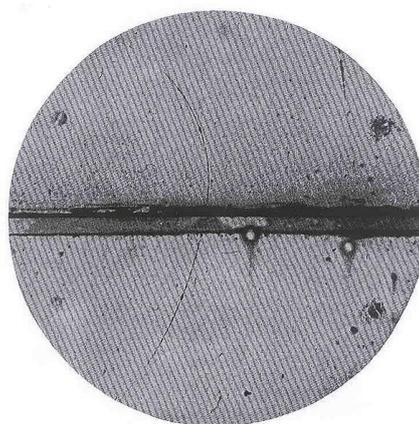


Figura 16: Descubrimiento del positrón

El positrón fue, efectivamente, detectado en 1932 por Carl Anderson (1905-1981), quien observó lo que se ve en la figura 16. Recordemos que una partícula no relativista (las conclusiones no cambian en lo esencial al considerar los efectos relativistas) cargada, al moverse en un campo magnético, sufre una fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B},$$

donde  $q$  es la carga eléctrica de la partícula,  $\vec{v}$  es su vector velocidad y  $\vec{B}$  es el campo magnético. En la figura, el campo magnético entra en el plano de la órbita. Una partícula con vector velocidad tangente a la trayectoria sufre, entonces, una fuerza centrípeta debida al campo y recorre una trayectoria circular como la que se ve, con radio  $R_C = \frac{mv}{|q|B}$ , conocido como radio del ciclotrón. La concavidad de la trayectoria es compatible con un electrón (carga  $-e$ ) viajando en sentido horario o con un positrón (carga  $+e$ ) viajando en sentido antihorario. Para definir cuál de las dos es la situación real, se introduce la placa de plomo: al pasar a través de la placa, la partícula disminuye su velocidad y, por lo tanto,

## II.2 MÁS PARTÍCULAS “ELEMENTALES” (DESDE 1930 HASTA 1960)

el radio de su órbita. Del resultado experimental, que se muestra en la figura, resulta que la partícula del experimento de Anderson se mueve en sentido antihorario y es un positrón.

Una pregunta que surge naturalmente es: si a cada partícula corresponde una antipartícula, por qué toda la materia de nuestro Universo está compuesta por las primeras y no por las segundas.

Las teorías científicas aceptadas afirman que en el origen del universo existían materia y antimateria en iguales proporciones. Pero la materia y la antimateria se aniquilan mutuamente, dando como resultado energía pura y, sin embargo, el universo que observamos está compuesto únicamente por materia. Se desconocen los motivos por los que no se ha encontrado antimateria en el universo. En Física, el proceso por el que la cantidad de materia superó a la de antimateria se denomina bariogénesis, y algunas posibles explicaciones son:

1. Pequeño exceso de materia tras el Big Bang: se supone que la materia que forma actualmente el universo podría ser el resultado de una ligera asimetría en las proporciones iniciales de ambas. Se ha calculado que la diferencia inicial entre materia y antimateria debió ser tan insignificante como de una partícula más de materia por cada diez mil millones de parejas partícula-antipartícula.

2. Asimetría CP: En 1967, Andréi Sajarov postuló por primera vez que las partículas y las antipartículas no tenían propiedades exactamente iguales o simétricas; se trata de una explicación basada en la violación de las simetrías discretas de conjugación de carga y paridad (violación CP). Algunos experimentos sugieren que esto quizás sea cierto y que, por lo tanto, no es necesario que haya existido un exceso de materia en el Big Bang: simplemente, las leyes físicas que rigen el universo favorecen el predominio de la materia frente a la antimateria.

3. Existencia de galaxias de antimateria ligada por antigraavedad: Muy pocos científicos confían en esta posibilidad, pero todavía no ha podido ser completamente descartada.

### II.2.3. Los neutrinos

Por la misma época del descubrimiento del positrón, se observó que algunos procesos de desintegración nuclear, conocidos como desintegración nuclear  $\beta$ , parecían violar la conservación de energía e impulso. En tales procesos, un núcleo radiactivo parecía decaer en otro núcleo más liviano, emitiendo sólo un electrón:



Si la carga eléctrica debe a conservarse, está claro que el núcleo hijo debe tener un protón más que su padre. Entonces, debe ser el que le sigue en la tabla periódica. Hay muchos ejemplos de decaimientos  $\beta$ : por ejemplo, el potasio  ${}_{19}^{A=40}K$  se transforma en calcio  ${}_{20}^{A=40}Ca$ , donde  $A$  es el peso atómico (suma de los números de protones y neutrones) y  $Z$  es el número atómico (número de protones). Como en todo proceso de desintegración o de dispersión, deben conservarse la energía y el impulso. Pero, en las medidas, se encontraba que el electrón saliente llevaba menos energía e impulso que los esperados. Para resolver esta paradoja, sin abandonar la muy probada ley de conservación del

## II.2 MÁS PARTÍCULAS “ELEMENTALES” (DESDE 1930 HASTA 1960)

tetraimpulso, Wolfgang Pauli (1900-1959) postuló, en 1930, la existencia de una nueva partícula, que se llevara la diferencia de energía e impulso pero no pudiera ser detectada por métodos electromagnéticos. Debía, entonces, ser eléctricamente neutra, para no afectar la conservación de la carga eléctrica. Para satisfacer la conservación de energía e impulso, su masa debía ser prácticamente cero (resultados más recientes indican que su masa no es exactamente nula, aunque sí del orden de apenas unos pocos eV, muy pequeña si se la compara con las masas de otras partículas elementales). Pero, además de no sufrir interacciones electromagnéticas (puesto que no la veían los detectores), tampoco debían participar en las interacciones nucleares (por no integrar el núcleo). No sólo se tenía una nueva partícula (el neutrino,  $\nu$ ), y su correspondiente antipartícula (el antineutrino,  $\bar{\nu}$ ) sino, además, una nueva interacción fundamental, bautizada interacción débil, de la cual participaban todas las partículas de materia conocidas, pero tan débil que un neutrino, no sufriendo ninguna otra interacción, podía penetrar años-luz de plomo sin dificultad.

En términos de las partículas consideradas elementales por entonces (el protón y el neutrón no son considerados elementales actualmente), el proceso (7) podía explicarse como:

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}. \quad (8)$$

Pronto se midieron otros procesos que sólo podían ser explicados por la presencia de un neutrino o de su antipartícula, el antineutrino. En primer lugar, el proceso llamado desintegración  $\beta$  inversa

$$\nu + n \rightarrow p + e. \quad (9)$$

Además:

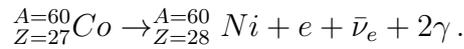
$$\pi^- \rightarrow \mu + \bar{\nu} \quad (10)$$

$$\pi^+ \rightarrow \bar{\mu} + \nu. \quad (11)$$

La pregunta natural es la siguiente: es el antineutrino que aparece en (8) igual al neutrino de (9)? Podría bien ocurrir, ya que el neutrino no tiene carga eléctrica, que fuese su propia antipartícula. Pero no es así: tienen distintas helicidades (la helicidad es la proyección del espín en dirección de la cantidad de movimiento y es una propiedad intrínseca del neutrino la de tener tal número cuántico igual a  $-\frac{1}{2}$ , mientras que el antineutrino lo tiene igual a  $\frac{1}{2}$ ). Es decir: el neutrino no es su propia antipartícula.

Esta característica, que implica la violación de la invariancia frente a paridad en las interacciones débiles, fue propuesta en forma teórica por T.D. Lee y C.N. Yang, y probada en el famoso experimento de desintegración del cobalto-60 realizado por C.S. Wu. En dicho experimento, se estudió la desintegración  $\beta$ , seguida de la desexcitación del níquel hijo con emisión de dos fotones:

## II.2 MÁS PARTÍCULAS “ELEMENTALES” (DESDE 1930 HASTA 1960)



En este experimento se encontró que la radiación  $\beta$ , en lugar de respetar la misma distribución que la  $\gamma$ , de origen electromagnético y, por lo tanto, respetuosa de la paridad, se emitía siempre mayoritariamente en oposición al espín nuclear, orientado mediante el campo magnético creado por un solenoide, como se muestra en la figura 17

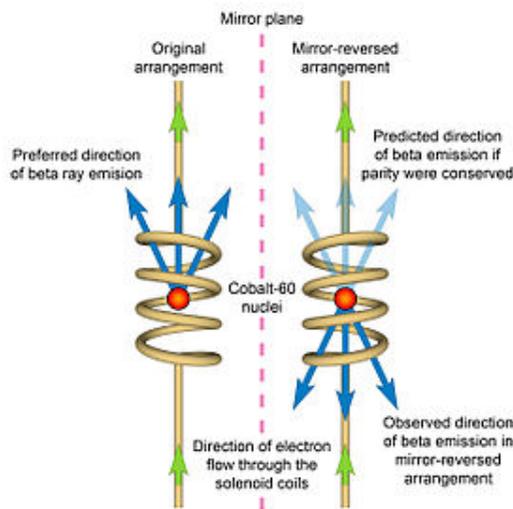


Figura 17: Experimento de Madame Wu

Se postuló, entonces, la existencia de un nuevo número cuántico aditivo (como lo es la carga eléctrica) conservado en los procesos débiles, llamado número leptónico y anotado por  $L$ . El electrón, el muón y ambos neutrinos tienen  $L = 1$ , mientras sus antipartículas tienen  $L = -1$  y los hadrones tienen  $L = 0$ . Visto que debe conservarse, la suma de los números leptónicos en el estado inicial debe coincidir con la suma de números leptónicos en el estado final de la misma. Eso impone que reacciones como (??) estén prohibidas y que puedan ocurrir todas las restantes que escribimos hasta ahora.

Pero, además, el neutrino de (9) no es el mismo que el de (11). Los distinguimos llamándolos, respectivamente, neutrino del electrón ( $\nu_e$ ) y neutrino del muón ( $\nu_\mu$ ). Experimentalmente, se observó que el proceso (muón que se transforma en electrón, emitiendo radiación)



## II.2 MÁS PARTÍCULAS “ELEMENTALES” (DESDE 1930 HASTA 1960)

no existe. Obsérvese que la conservación de  $L$  no lo prohíbe. Para explicar por qué no ocurría fue necesario introducir dos diferentes números leptónicos: el número leptónico del electrón ( $L_e$ ) y el de muón ( $L_\mu$ ), cada uno de ellos conservado en forma independiente y, por supuesto, tales que  $L_e + L_\mu = L$ . Además,  $L_e = 1$  para el electrón y su neutrino,  $L_e = -1$  para sus antipartículas,  $L_e = 0$  para el muón, su neutrino y todas sus antipartículas y mutatis mutandi para la familia del muón.

Vale la pena notar que hay una diferencia entre los números leptónicos y la carga eléctrica: como veremos después, la conservación de la carga eléctrica deriva de la existencia de una simetría fundamental en la teoría que explica la interacción electromagnética. Cuando se propuso la existencia de estos varios números fermiónicos, no existía aún una teoría que describiera las interacciones débiles, que recién aparecería muchos años después.

A esta altura, tenemos ya muchas partículas que interactúan electromagnética (si son cargadas) y débilmente, pero no sienten interacción nuclear: el electrón, el muón, sus respectivos neutrinos y las antipartículas de todos ellos. A todas estas partículas se las llama leptones (como habíamos bautizado ya al electrón y al muón (la partícula  $\tau$ , su neutrino y las correspondientes antipartículas se agregarían luego a esta categoría).

Contrariamente, a todas las partículas que sufran los tres tipos de interacción (como el protón y el neutrón, los mesones pi y sus antipartículas) las llamaremos hadrones. Durante el período que estamos describiendo se descubrieron muchos otros hadrones, tantos que empezó a sospecharse que los hadrones no podían ser elementales.

### II.2.4. Partículas “extrañas”

Por un breve período, hacia 1947, parecía que toda la física de partículas había recuperado el orden: se había detectado el mesón  $\pi$  de Yukawa, y también el positrón y el neutrino (nótese que todas estas eran partículas cuya existencia fue primero supuesta y que se midieron a posteriori). La necesidad de la existencia del muón no estaba del todo clara, pero su existencia no contradecía ninguna predicción teórica. Pero esta situación bastante cómoda se transformó, a partir de diciembre de 1947, en un verdadero caos. Primero, en medidas de rayos cósmicos, se detectó un proceso similar al de la figura 18. Se concluyó de este experimento que, al pasar las partículas provenientes de rayos cósmicos a través de la placa de hierro, se producía una partícula neutra, que se desintegraba después en un par de piones, dejando la novedosa traza en forma de V. A esa partícula se la llama actualmente el kaón neutro ( $K^0$ ) y el proceso se anota:

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- . \quad (12)$$

Poco después, se midió otro proceso, en que una partícula cargada, que se denota  $K^+$ , se desintegraba en tres piones:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^+ .$$

Ambas partículas se comportaban, en cierto sentido, como los piones y, como ellos, tenían espín entero. A todas las partículas que sufrían la interacción nuclear, además de la

## II.2 MÁS PARTÍCULAS “ELEMENTALES” (DESDE 1930 HASTA 1960)

débil y la electromagnética y que tenían espín entero, se las llamó mesones. A continuación, empezaron a descubrirse muchísimos otros mesones:  $\eta$ ,  $\phi$ ,  $\omega$ ,  $\rho$  y otras, todas ellas similares a piones pesados.

Al mismo tiempo, se midió otro proceso, similar al de la ecuación (12) (llamado tipo V por su aspecto), pero con un pión y un protón como productos de desintegración:



La figura 18 muestra un esquema de los rastros dejados por los productos de desintegración en este último experimento.

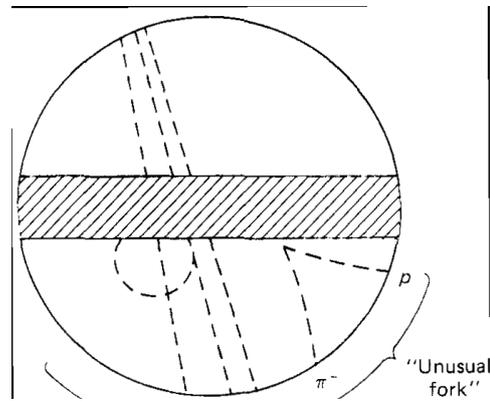
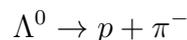


Figura 18: Descubrimiento del barión  $\Lambda^0$

Esa partícula, que también participa de las interacciones fuertes, se comporta como los protones y neutrones y, como ellos, tiene espín semientero. A todas estas partículas se las bautizó bariones. En los siguientes años se descubrieron muchos otros bariones:  $\Sigma$ ,  $\Xi$  y otros.

Todas estas nuevas partículas, no sólo eran inesperadas, sino que eran extrañas, en el sentido de crearse de modo copioso (vía interacción nuclear) y decaer muy lentamente (vía interacción débil). Para explicar esto, se asignó a cada partícula un nuevo número cuántico aditivo, llamado “extrañeza” y anotado  $S$ , que debía conservarse en las reacciones nucleares, pero no en las débiles. A las partículas extrañas se les asignó  $S = 1$  y a las restantes partículas,  $S = 0$ . Así, procesos débiles tales como



donde la única partícula con extrañeza es  $\Lambda^0$  podían ocurrir vía interacción débil (que viola la conservación de  $S$ ), pero no vía interacción nuclear (que conserva la extrañeza) y eran canal de desintegración para las partículas extrañas.

### II.3 LA “ÓCTUPLE SENDA” (EIGHTFOLD WAY) Y EL MODELO DE QUARKS

---

Notemos que, hasta ahora, nada impediría la desintegración del protón, mediante el proceso:

$$p \rightarrow \bar{e} + \gamma.$$

Obviamente, la probabilidad de este proceso debe ser muy baja: si fuera grande, los átomos comunes se desintegrarían. Aunque tal desintegración no se ha excluido por completo, para forzar que no ocurra, se puede introducir un nuevo número conservado: el número bariónico, que vale uno para los bariones, -1 para sus antipartículas y cero para mesones y leptones. De este modo, el protón, siendo el barión más liviano, no podría decaer en nada, conservando al mismo tiempo el número bariónico. (Obsérvese que nunca se postuló algo como un “número mesónico”). Las teorías de gran unificación de las fuerzas fundamentales más modernas predicen una muy pequeña probabilidad de desintegración del protón, y existen experimentos destinados a acotar esa probabilidad. Pero la cota parece ser compatible con cero. Actualmente, la cota mínima a la vida media del protón es de  $10^{34}$  años.

Como vemos, cerca de 1960, el panorama de la física de partículas era caótico. Para dar una idea de la situación, al recibir su premio Nobel, Willis Lamb (1905-2008) dijo:

“Cuando se entregó por primera vez el Premio Nobel, los físicos sólo conocían dos objetos que podían llamarse “partículas elementales: el protón y el electrón. A partir de 1930, apareció una infinidad de nuevas partículas. He escuchado decir: antes, quien descubría una nueva partícula solía ser premiado con un Premio Nobel. Ahora, debería pagar una multa de U\$S 10.000.”

### II.3. La “óctuple senda” (eightfold way) y el modelo de quarks

Para ampliar sobre esta sección, se sugieren los libros que aparecen como referencias [9, 10].

Como se ve, lo que había estado tan claro hacia fines de la década de 1940, era terriblemente complicado a mediados de la década de 1960. Era necesario el equivalente de Mendeleev, que pusiera cierto orden en este zoológico donde se creaban cada vez más partículas, estableciendo una especie de tabla periódica, no ya para los núcleos, sino para los hadrones. Los Mendeleev de los hadrones fueron Murray Gell-Mann (1929-) y Yuval Ne’eman (1925-2006). Gell-Mann llamó a su esquema “La óctuple senda”, una expresión tomada de las enseñanzas de Buda, quien enunció ocho modos de proceder para conseguir el fin del sufrimiento mediante la superación de la ignorancia. El nombre hacía también referencia a los grupos de ocho partículas con características similares en que podían reunirse algunos de los bariones y, también, algunos de los muchos mesones conocidos.

La observación que realizaron ambos científicos fue que los bariones y mesones con masas comparables formaban diagramas muy definidos (multipletes) si se los agrupaba usando sus carga eléctrica y su extrañeza. Por ejemplo, los ocho bariones más livianos se agrupaban formando el diagrama que se muestra en la figura 19

II.3 LA "ÓCTUPLE SENDA" (EIGHTFOLD WAY) Y EL MODELO DE QUARKS

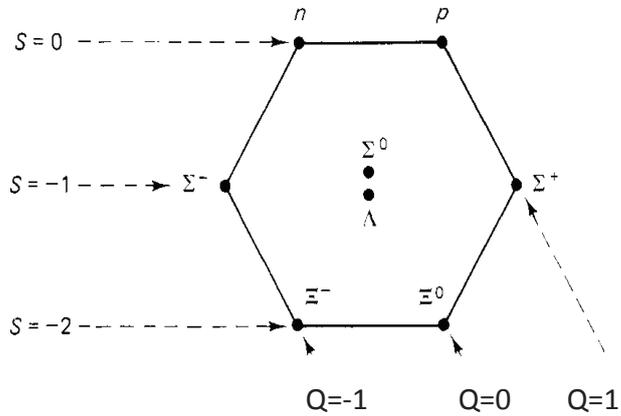


Figura 19: Octuplete de bariones

Este conjunto de partículas se conoce como el octuplete bariónico. Nótese que las partículas con las mismas cargas (en unidades de la carga del protón) se encuentran sobre las mismas diagonales. Las líneas horizontales, en cambio, contienen partículas con la misma extrañeza.

Los ocho mesones más livianos se agrupan en un diagrama similar, que se ve en la figura 20.

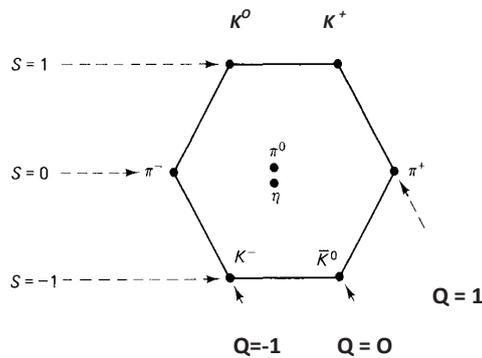


Figura 20: Octuplete de mesones

No sólo hexágonos existían en el esquema: los diez bariones que seguían en masa se agrupaban en un decuplete, como se ve en la figura 21.

Lo notable es que, también en forma similar a lo que había hecho Mendeleev, al acomodarse estos últimos bariones en el decuplete, la partícula ahora conocida como  $\Omega^-$  no había sido detectada. Gell-Mann predijo su existencia y cuánto debía valer su masa. La partícula fue, finalmente, detectada en 1964.

Como ocurrió mucho antes con la tabla periódica, la Óctuple senda dio origen a la pregunta: por qué se portan los hadrones de modo tan regular?, por qué se reúnen en estos curiosos diagramas? La tabla periódica debió esperar muchos años hasta que se desarrollara la mecánica Cuántica y, de la mano de este desarrollo y del principio de exclusión de Pauli se pudiera explicar su regularidad. En cambio, la óctuple senda encontró una explicación

### II.3 LA "ÓCTUPLE SENDA" (EIGHTFOLD WAY) Y EL MODELO DE QUARKS

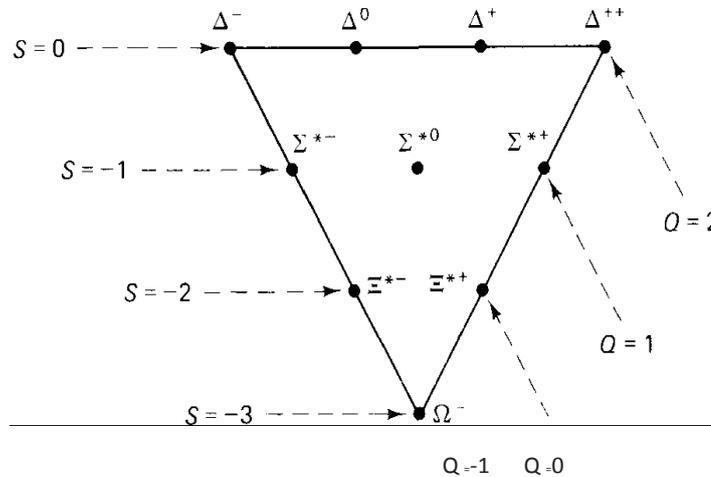


Figura 21: Decuplete bariónico

en muy pocos años: ya en 1964, el mismo Gell-Mann y Stephan Zweig (1881-1942) propusieron, de manera independiente, que todos los hadrones conocidos por entonces estaban compuestos por partículas más elementales: los quarks. Los quarks existían en tres tipos, o sabores, caracterizados por su carga eléctrica y su extrañeza, formando un diagrama triangular como el que se muestra en la figura 22.

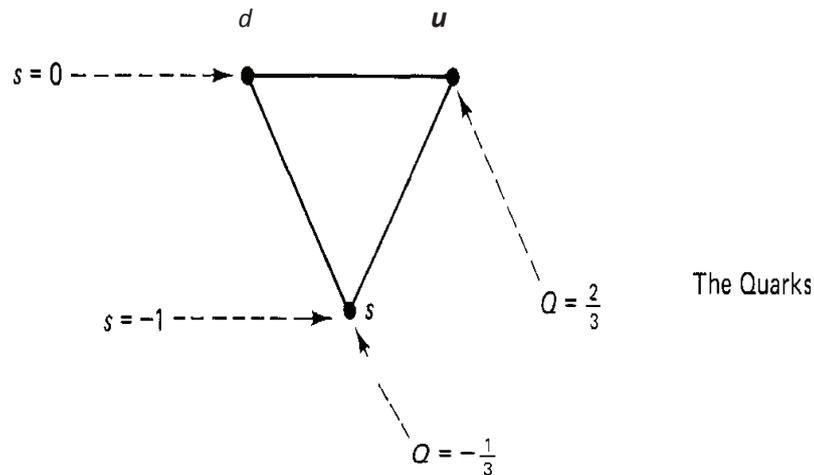


Figura 22: Los quarks

El quark up ( $u$ ) lleva carga (en unidades de carga del protón)  $2/3$  y extrañeza cero; el quark down ( $d$ ) tiene carga  $-1/3$  y extrañeza cero; el  $s$ , llamado quark extraño, tiene carga  $-1/3$  y extrañeza  $S = -1$ . A cada quark  $q$  corresponde un antiquark  $\bar{q}$ , con ambos números cuánticos (carga eléctrica y extrañeza) cambiados de signo, como se muestra en la figura 23.

## II.3 LA “ÓCTUPLE SENDA” (EIGHTFOLD WAY) Y EL MODELO DE QUARKS

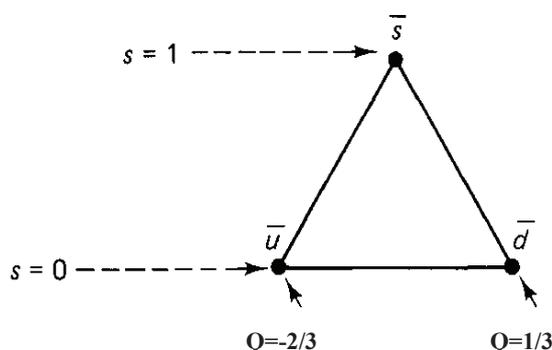


Figura 23: Los antiquarks

El modelo de quarks afirma que:

- Cada barión está compuesto por tres quarks (cada antibarión está compuesto de tres antiquarks). Por ejemplo, un protón está compuesto por dos quarks  $u$  y un quark  $d$ .
- Cada mesón está compuesto por un quark y un antiquark. Por ejemplo, el pión  $\pi^+$  está compuesto por un  $u$  y un  $\bar{d}$ .

Con estas reglas es cuestión de simple aritmética construir los diversos hadrones que forman, por ejemplo, el octete de mesones y el decuplete de bariones. Por ejemplo: tres quarks  $u$  tendrán carga total  $+2$  y extrañeza cero. Esa es la partícula  $\Delta^{++}$ . Algo similar ocurre con las posibles combinaciones quark-antiquark, que reproducen el octete mesónico. Pero hay una combinación,  $s\bar{s}$ , que corresponde a una novena partícula que no está en el hexágono. Se trata de un tercer mesón, aparte del  $\pi^0$  y del  $\eta$ , con ambos números cuánticos nulos. Tal partícula fue, efectivamente, detectada y se llama la partícula  $\eta'$ . Explicar el octete bariónico es algo más complicado, porque requiere tener en cuenta, además, los espines, pero funciona igualmente bien. Efectivamente, todos los multipletes de la óctuple senda que tienen masas más grandes pueden explicarse mediante estados excitados de los quarks. Obsérvese que hay ciertos hadrones cuya existencia sería incompatible con el modelo de quarks. Por ejemplo: no puede haber un barión con  $S = 0$  y  $Q = -2$ : no existe combinación de tres quarks que dé por resultado esos números. Tampoco puede haber un mesón de carga  $+2$ , como la del barión  $\Delta^{++}$  o de extrañeza  $-3$ , como el barión  $\Omega^-$ . Durante mucho tiempo se realizó una intensa búsqueda de estas partículas “exóticas”, pero no se encontró ninguna.

Las partículas que, hasta 1964, habían parecido ser partículas elementales (en particular, el protón y el neutrón), comenzaban a pensarse ahora como compuestas de otras más elementales, los quarks. La construcción precisa de todos los hadrones a partir de quarks está fundada en el uso de la teoría de grupos que, como veremos más adelante, aparece toda vez que existe una simetría. El grupo de simetría en que se funda la óctuple senda es el grupo  $SU(3)$ . Suele llamárselo grupo  $SU(3)$  de sabor, para distinguirlo del grupo  $SU(3)$  de color, sobre el cual está basada la teoría que explica la dinámica de los quarks.

### II.3 LA “ÓCTUPLE SENDA” (EIGHTFOLD WAY) Y EL MODELO DE QUARKS

---

En esta etapa inicial del modelo de quarks se dice, entonces, que los quarks existen en tres especies o “sabores”:  $u$ ,  $d$ ,  $s$ .

Una dificultad con el modelo de quarks se presentó al tratar de interpretarlo en base al principio de exclusión: los quarks debían tener spin  $1/2$  para poder, con tres de ellos, construir un barión, que también tiene spin  $1/2$ . Así resultaba, por ejemplo, que la partícula  $\Delta^{++}$  debía consistir de tres quarks idénticos, en el mismo estado, violando el principio de exclusión. Para resolver esta dificultad se propuso la existencia de otro número cuántico: el color. Por cada sabor de quark, existían tres colores. Así, los tres quarks que integran  $\Delta^{++}$  pueden coexistir con todos los restantes números coincidentes, pero distintos valores de la carga de color. Tal carga de color es la consecuencia de una nueva simetría, cuyo grupo asociado es también  $SU(3)$ . Se la llama simetría de color y se agrega al modelo de quarks un tercer postulado:

- Todas las partículas existentes en la naturaleza tienen carga de color nula (las tres cargas deben aparecer en la misma proporción).

Así, todos los bariones deben estar compuestos de un quark de cada color, lo mismo para los antibariones, compuestos de un antiquark de cada color (con signo negativo) y para los mesones  $q\bar{q}$ , que tienen carga de color nula, como todas las restantes cargas. Pero no pueden existir partículas formadas por dos o por cuatro quarks, porque su carga de color no podría anularse.

Este postulado se relaciona con un hecho bien conocido: al cabo de más de 40 años, nadie ha detectado un quark libre. Si el protón, por ejemplo, está compuesto de tres quarks, podría pensarse que, golpeándolo con suficiente energía, los quarks deberían aparecer después de la colisión como partículas libres. Pero no es el caso. Si se produjeran, serían muy fáciles de detectar, debido a su carga fraccionaria, que los hace únicos. Pero ningún quark libre ha sido detectado jamás. A este fenómeno se lo conoce como confinamiento de los quarks y una tarea pendiente para los físicos teóricos consiste en mostrar de modo analítico que la Cromodinámica Cuántica (QCD, teoría de las interacciones fuertes entre quarks) conduce, en su límite de bajas energías, al confinamiento.

A estos tres sabores iniciales de quarks (up ( $u$ ), down ( $d$ ), strange( $s$ )) se agregaron, con el tiempo, otros tres: charm ( $c$ ), top ( $t$ ) y bottom ( $b$ ).

Dado que los nucleones están formados por quarks, en el marco del modelo de quarks, la fuerza fuerte fundamental ya no es una fuerza entre nucleones, sino una fuerza fuerte entre quarks: la Cromodinámica Cuántica (QCD), basada en la simetría  $SU(3)$  de color. Por lo tanto, la fuerza nuclear del tipo de Yukawa se interpreta como una fuerza efectiva, remanente a bajas energías o, lo que es igual, a grandes distancias, de la QCD, tal como las fuerzas de van der Waals son las fuerzas efectivas provenientes de la Electrodinámica Cuántica (QED).

## II.4. Evolución de las teorías de las interacciones fundamentales

A fin del siglo XIX ya existía una teoría de las interacciones electromagnéticas: la teoría de James Clerk Maxwell (1831-1879). Vale la pena observar que esta teoría es el primer ejemplo de una teoría de campos *relativista* para una de las interacciones fundamentales: la Electrodinámica. También debe señalarse que es el primer ejemplo de unificación. Antes de Maxwell, electricidad y magnetismo eran considerados como dos fenómenos distintos. Maxwell comprendió que una única teoría podía incluir a ambos como dos aspectos de una misma interacción: la interacción electromagnética, y mostró que esa unificación podía realizarse respetando el principio de la Relatividad Especial de Einstein. Por la misma época, Einstein formuló la teoría de la Relatividad General, que es una teoría de campos para otra de las interacciones fundamentales: la gravitación.

Al comprenderse que debían existir, además de estas interacciones otras dos: nuclear y débil se propusieron, por analogía con la Electrodinámica, sendas teorías relativistas que las describían de modo no cuántico.

Pero está claro que una buena teoría de las interacciones fundamentales no sólo debe ser consistente con la Relatividad, sino también con los postulados de la Mecánica Cuántica. Conciliar ambas cosas fue una tarea que demandó decenios. Sobre la base de la Electrodinámica de Maxwell, Freeman Dyson (1923-), Julian Schwinger (1918-1994), Richard Feynman (1918-1988) y otros desarrollaron, en la década del 50, la Electrodinámica Cuántica (QED). Se trata de una teoría cuántica de campos, basada en el principio de invariancia frente a transformaciones de gauge. Es una teoría capaz de reproducir con extraordinaria precisión los resultados experimentales. Por ejemplo, la predicción de la teoría para la constante de estructura fina,  $\alpha$ , coincide con la medida experimental hasta orden  $10^{-8}$  (el error es, a lo sumo del orden de una parte en mil millones).

Actualmente sabemos que la interacción nuclear no es una interacción fundamental, porque los nucleones no lo son. En cambio, las partículas elementales son los quarks, de los cuales están formadas todas las partículas que interactúan fuertemente, llamadas hadrones. La interacción fuerte, tal como la entendemos ahora, es una fuerza fuerte entre quarks. Una teoría de campos cuántica y relativista para esta interacción también existe: es la Cromodinámica Cuántica (QCD), basada en la simetría de color y con una carga de color asociada. También ésta es una teoría de gauge, y fue desarrollada generalizando las ideas que caracterizan a la Electrodinámica Cuántica. En este contexto, debería poder demostrarse que la fuerza nuclear es el residuo, a bajas energías, de QCD. Tal demostración no existe, porque requeriría resolver QCD en regiones donde la constante de acoplamiento se hace muy grande (esclavitud infrarroja) y no puede usarse teoría de perturbaciones. El otro límite de QCD (altas energías), donde la constante de acoplamiento es pequeña (libertad asintótica) arroja predicciones en perfecto acuerdo con los resultados de los experimentos de altas energías.

También la interacción débil es explicada por una teoría cuántica relativista de campos de gauge: la teoría de Glashow-Salam y Weinberg, propuesta en la década de 1960.

## II.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

---

Esta teoría no sólo describe la interacción débil adecuadamente, sino que la describe en forma unificada con la interacción electromagnética. Se la conoce como la teoría de las interacciones electrodébiles. Además de describir procesos débiles que se conocían en la época de su formulación, la teoría predijo la existencia de los llamados procesos de corriente neutra, medidos a posteriori. Pero, como mencionamos antes, tiene algunos aspectos no del todo satisfactorios: para dar masa a las partículas requiere de un mecanismo conocido como el mecanismo de Higgs, cuyo origen y razón de ser no se comprenden completamente. Este mecanismo predice la existencia de una partícula de espín cero (la partícula de Higgs) que parece haberse detectado muy recientemente en los experimentos del LHC (CERN; Ginebra), aunque aún no se ha completado su identificación.

Otros detalles no completamente satisfactorios del modelo de Glashow, Salam y Weinberg son que no explica la masa (pequeña, pero no nula, según indican los experimentos) de los neutrinos y, sobre todo, que contiene demasiados parámetros a ajustar con el experimento, lo cual no es deseable en una teoría fundamental.

Un poco por estas razones y más por cumplir con el sueño de unificación del que Maxwell fue precursor, se han propuesto diversas teorías que unifican las interacciones electrodébiles y las fuertes. Las teorías de cuerdas van más allá: proponen un modo de unificación que, además, podría conducir a la cuantización de la gravitación. Pero, actualmente, no está aún claro que sea este el camino a seguir para tener una “teoría de todo” (TOE), como suele llamarse a la teoría de cuerdas.

La figura 24 presenta una comparación de los rangos relativos de las interacciones fundamentales entre los campos de materia y muestra las partículas cuánticas que actúan como mediadoras en cada una de ellas. La figura 25 presenta un resumen del llamado Modelo Estándar de la Física de Partículas Elementales, tal como se lo entiende en la actualidad.

## II.5. Ejercicios propuestos

- Utilizando la conservación de energía e impulso y recordando que, tanto para el fotón incidente como para el fotón saliente, se tiene  $E_\gamma = h\nu$ , demuestre la fórmula de Compton, que expresa, como función del ángulo, la longitud de onda del fotón saliente en términos de la del fotón entrante.
- En la siguiente página:

*[https://en.wikipedia.org/wiki/Linear\\_particle\\_accelerator](https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_particle_accelerator)*

puede encontrar una animación que muestra el funcionamiento de un acelerador lineal (linac). En tales aceleradores, la fuente de partículas cargadas y los cilindros huecos pares están conectados a un electrodo del potencial eléctrico alterno, de amplitud  $V_0$ . Los cilindros impares están conectados al otro electrodo. La frecuencia del potencial se ajusta de modo que la partícula acelerada llegue a una región entre dos cilindros exactamente cada medio período del potencial. De ese modo,

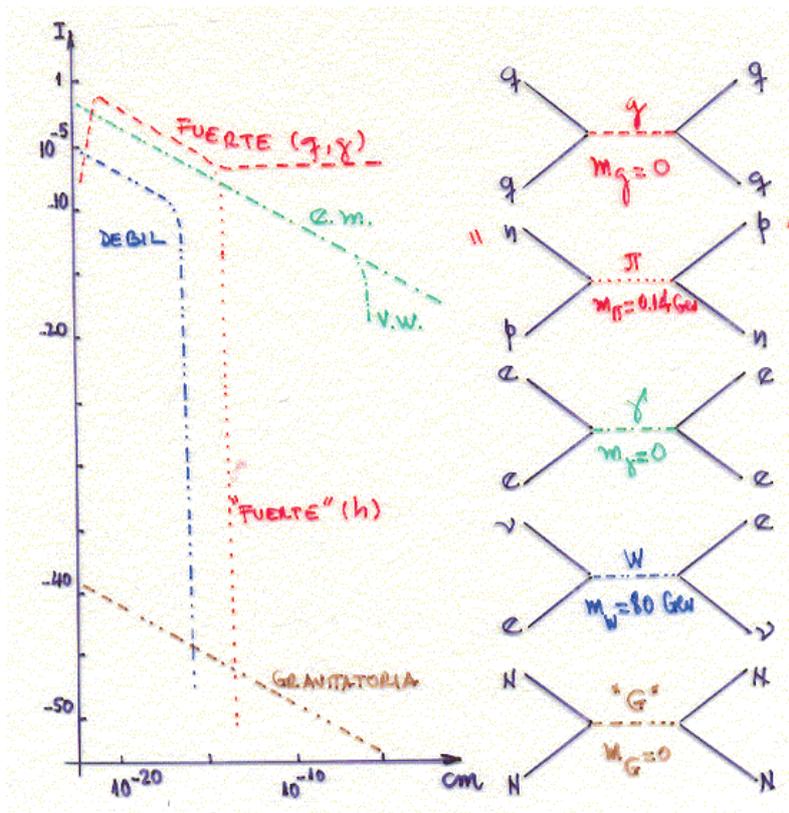


Figura 24: Rangos de las interacciones fundamentales (y no tanto)

la partícula sufrirá sucesivas aceleraciones en las regiones entre cilindros y mantendrá una velocidad constante en el interior de los mismos. Suponiendo que las partículas aceleradas tienen carga  $q > 0$  y masa  $m$ , que su velocidad inicial (al salir de la fuente) es nula, que inicialmente los cilindros impares están conectados al electrodo positivo y que las velocidades alcanzadas están muy por debajo de la de la luz, demostrar que:

a) La velocidad de la partícula en el  $n$ -ésimo cilindro es  $\sqrt{\frac{4nqV_0}{m}}$ ;

b) Si  $L_n$  es la longitud del  $n$ -ésimo cilindro, la misma debe ser tal que  $\frac{L_n}{L_1} = \sqrt{n}$ ;

c) El período del potencial alterno debe ser  $T = L_1 \sqrt{\frac{m}{qV_0}}$ .

d) Calcular la frecuencia de un acelerador lineal de cinco etapas, en el cual  $L_1 = 10 \text{ cm}$ , usado para acelerar iones de carga  $q = 2 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  (dos unidades de carga eléctrica) y masa  $m = 4 \times 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$  (cuatro unidades de masa atómica). Suponer que la amplitud del potencial es  $V_0 = 100 \text{ V}$ .

- a) Supongamos que una partícula de masa  $m$  choca contra un blanco de la misma masa, que se encuentra en reposo en el sistema de laboratorio, para dar lugar a una

# FUNDAMENTAL PARTICLES AND INTERACTIONS

The Standard Model summarizes the current knowledge in Particle Physics. It is the quantum theory that includes the theory of strong interactions (quantum chromodynamics or QCD) and the unified theory of weak and electromagnetic interactions (electroweak). Gravity is included on this chart because it is one of the fundamental interactions even though not part of the "Standard Model."

## FERMIONS

Leptons spin = 1/2			Quarks spin = 1/2		
Flavor	Mass GeV/c <sup>2</sup>	Electric charge	Flavor	Approx. Mass GeV/c <sup>2</sup>	Electric charge
$\nu_e$ electron neutrino	<1.10 <sup>-8</sup>	0	<b>u</b> up	0.003	2/3
$e^-$ electron	0.000511	-1	<b>d</b> down	0.006	-1/3
$\nu_\mu$ muon neutrino	<0.0002	0	<b>c</b> charm	1.3	2/3
$\mu^-$ muon	0.106	-1	<b>s</b> strange	0.1	-1/3
$\nu_\tau$ tau neutrino	<0.02	0	<b>t</b> top	175	2/3
$\tau^-$ tau	1.7771	-1	<b>b</b> bottom	4.3	-1/3

**Spin** is the intrinsic angular momentum of particles. Spin is given in units of  $\hbar$ , which is the quantum unit of angular momentum, where  $\hbar = h/2\pi = 6.58 \times 10^{-34}$  GeV s =  $1.05 \times 10^{-34}$  J s.

**Electric charges** are given in units of the proton's charge. In SI units the electric charge of the proton is  $1.60 \times 10^{-19}$  coulombs.

The **energy** unit of particle physics is the electronvolt (eV), the energy gained by one electron in crossing a potential difference of one volt. **Masses** are given in GeV/c<sup>2</sup> (remember  $E = mc^2$ ), where  $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-10}$  joule. The mass of the proton is  $0.938 \text{ GeV}/c^2 = 1.67 \times 10^{-27}$  kg.

## BOSONS

Unified Electroweak spin = 1			Strong (color) spin = 1		
Name	Mass GeV/c <sup>2</sup>	Electric charge	Name	Mass GeV/c <sup>2</sup>	Electric charge
$\gamma$ photon	0	0	<b>g</b> gluon	0	0
$W^-$	80.4	-1			
$W^+$	80.4	+1			
$Z^0$	91.187	0			

**Color Charge**  
Each quark carries one of three types of "strong charge," also called "color charge." These charges have nothing to do with the colors of visible light. There are eight possible types of color charge for gluons. Just as electrically charged particles interact by exchanging photons, in strong interactions color-charged particles interact by exchanging gluons. Leptons, photons, and  $W$  and  $Z$  bosons have no strong interactions and hence no color charge.

### Quarks Confined in Mesons and Baryons

One cannot isolate quarks and gluons; they are confined in color-neutral particles called **hadrons**. This confinement (binding) results from multiple exchanges of gluons among the color-charged constituents. As color-charged particles (quarks and gluons) move apart, the energy in the color-force field between them increases. This energy eventually is converted into additional quark-antiquark pairs (see figure below). The quarks and antiquarks then combine into hadrons; these are the particles seen to emerge. Two types of hadrons have been observed in nature: **mesons**  $q\bar{q}$  and **baryons**  $qqq$ .

### Residual Strong Interaction

The strong binding of color-neutral protons and neutrons to form nuclei is due to residual strong interactions between their color-charged constituents. It is similar to the residual electrical interaction that binds electrically neutral atoms to form molecules. It can also be viewed as the exchange of mesons between the hadrons.

## PROPERTIES OF THE INTERACTIONS

Baryons $qqq$ and Antibaryons $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$					
Baryons are fermionic hadrons. There are about 120 types of baryons.					
Symbol	Name	Quark content	Electric charge	Mass GeV/c <sup>2</sup>	Spin
$p$	proton	$uud$	1	0.938	1/2
$\bar{p}$	anti-proton	$\bar{u}\bar{u}\bar{d}$	-1	0.938	1/2
$n$	neutron	$udd$	0	0.940	1/2
$\Lambda$	lambda	$uds$	0	1.116	1/2
$\Omega^-$	omega	$sss$	-1	1.672	3/2

### Matter and Antimatter

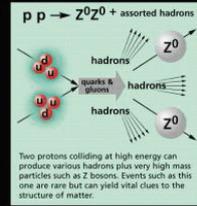
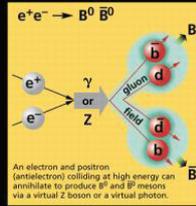
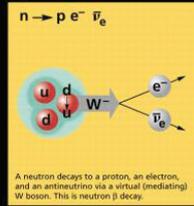
For every particle type there is a corresponding antiparticle type, denoted by a bar over the particle symbol (unless + or - charge is shown). Particle and antiparticle have identical mass and spin but opposite charges. Some electrically neutral bosons (e.g.,  $Z^0$ ,  $\gamma$ , and  $\eta_c = c\bar{c}$ , but not  $K^0 = d\bar{s}$ ) are their own antiparticles.

### Figures

These diagrams are an artist's conception of physical processes. They are not exact and have no meaningful scale. Green shaded areas represent the cloud of gluons or the gluon field, and red lines the quark paths.

Property	Gravitational	Weak (Electroweak)	Electromagnetic	Strong	
	Mass - Energy	Flavor	Electric Charge	Color Charge	Residual
Acts on:	All	Quarks, Leptons	Electrically charged	Quarks, Gluons	Hadrons
Particles experiencing:	All	Quarks, Leptons	Electrically charged	Quarks, Gluons	Hadrons
Particles mediating:	Graviton (not yet observed)	$W^+$ $W^-$ $Z^0$	$\gamma$	Gluons	Mesons
Strength relative to electromag for two u quarks at:	$10^{-41}$	0.8	1	25	Not applicable to quarks
for two protons in nucleus	$10^{-41}$	$10^{-4}$	1	60	Not applicable to hadrons
	$10^{-36}$	$10^{-7}$	1	Not applicable to hadrons	20

Mesons $q\bar{q}$					
Mesons are bosonic hadrons. There are about 140 types of mesons.					
Symbol	Name	Quark content	Electric charge	Mass GeV/c <sup>2</sup>	Spin
$\pi^+$	pion	$u\bar{d}$	+1	0.140	0
$K^-$	kaon	$s\bar{u}$	-1	0.494	0
$\rho^+$	rho	$u\bar{d}$	+1	0.770	1
$B^0$	B-zero	$d\bar{b}$	0	5.279	0
$\eta_c$	eta-c	$c\bar{c}$	0	2.980	0



**The Particle Adventure**  
Visit the award-winning web feature *The Particle Adventure* at <http://ParticleAdventure.org>

This chart has been made possible by the generous support of:  
U.S. Department of Energy  
U.S. National Science Foundation  
Lawrence Berkeley National Laboratory  
Stanford Linear Accelerator Center  
American Physical Society, Division of Particle and Fields  
**BURLE INDUSTRIES, INC.**

©2000 Contemporary Physics Education Project. CPEP is a non-profit organization of teachers, physicists, and educators. Send mail to: CPEP, MS 500-308, Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA 94720. For information on charts, materials, hands-on classroom activities, and workshops, see: <http://CPEPweb.org>

Figura 25: Modelo Estándar

nueva partícula de masa  $M$ . Sólo una fracción de la energía de la partícula incidente está disponible para crear una nueva partícula. Demostrar que la energía disponible es  $Mc^2 = 2mc^2 \sqrt{1 + \frac{K}{2mc^2}}$ , donde  $K$  es la energía cinética de la partícula incidente. Este resultado es una de las razones por las cuales, en la mayoría de los aceleradores se estudian colisiones frontales (notar que este tipo de colisiones sólo pueden ser obtenidas en aceleradores circulares). Suponer, entonces, una colisión frontal de dos partículas de igual masa  $m$ , e igual energía cinética; demostrar que la energía total disponible es  $Mc^2 = 2mc^2(1 + \frac{K}{2mc^2})$ .

b) En un colisionador electron-positrón, cada partícula es acelerada hasta alcanzar, en el sistema de referencia del laboratorio, una energía cinética  $K$ . Cuando se produce un choque frontal entre un electrón y un positrón, ambos con la energía antes mencionada, cuál es el mínimo valor de  $K$  compatible con la detección, después del choque, de un bosón  $Z^0$  en reposo (la masa de este bosón intermediario es de  $90 \text{ GeV}$ )?

c) Hasta qué energía debería acelerarse el positrón si quisiera producirse un  $Z^0$  como consecuencia de su choque con un electrón en reposo? Estaría en reposo el  $Z^0$  producido?

## II.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

---

Sugerencia: utilice la conservación de energía e impulso durante la colisión y recuerde que  $E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4$ .

- En el marco de la relatividad especial, la fuerza actuante sobre una partícula cargada sometida a un campo magnético (caso de campo eléctrico nulo de la fuerza de Lorentz) está dada por  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Sabiendo que el impulso espacial de la partícula es  $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ ,
  - a) Demostrar que el módulo de la velocidad angular (llamada de Larmor o del ciclotrón) está dado por  $\omega = \frac{q|\vec{B}|}{\gamma m}$ , donde  $m$  es la masa de la partícula y  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ .
  - b) Cuál es el módulo del vector cantidad de movimiento de una partícula de carga igual a la carga del electrón sabiendo que, en una cámara de burbujas donde actúa un campo magnético de  $|\vec{B}| = 2T$ , describe una órbita de radio  $R = 33,4cm$
- Utilizando la conservación de energía e impulso y recordando que, tanto para el fotón incidente como para el fotón saliente, se tiene  $E_\gamma = h\nu$ , demuestre la fórmula de Compton, que expresa, como función del ángulo, la longitud de onda del fotón saliente en términos de la del fotón entrante.

## *II.5 EJERCICIOS PROPUESTOS*

---

## **Parte III**

# **Simetrías en Física Subatómica**



### III.1. Simetrías, grupos y leyes de conservación

Esta sección está basada, fundamentalmente, sobre el correspondiente capítulo de la referencia [3]. Ver también [12, 13]. Algunos videos de divulgación y programas interactivos sobre simetrías pueden encontrarse en:

[www.geometriadinamica.cl/2009/11/el-lenguaje-de-la-simetria/](http://www.geometriadinamica.cl/2009/11/el-lenguaje-de-la-simetria/);

[www.dailymotion.com/video/x1vt7e\\_frank-wilczek\\_simetria fisica-y-music\\_school](http://www.dailymotion.com/video/x1vt7e_frank-wilczek_simetria fisica-y-music_school)

[www.acorral.es/index3.htm](http://www.acorral.es/index3.htm);

[www.geometriadinamica.es/Tabla/Investigaciones/Arte-y-Geometria-Mosaicos/](http://www.geometriadinamica.es/Tabla/Investigaciones/Arte-y-Geometria-Mosaicos/)

[www.youtube.com/watch?v=LpvLCN19y3A](http://www.youtube.com/watch?v=LpvLCN19y3A)

Se recomienda, como lectura adicional [11] (la versión en español está agotada), de donde proviene la cita siguiente:

*“La idea de simetría, no importa en forma cuán amplia o restringida se la considere, es una idea mediante la cual el hombre, a través de los siglos, ha tratado de comprender y crear orden, belleza y perfección.”* Hermann Weyl (1885-1955)

Más allá de un puro placer estético, en el mundo de la Física (y mucho más en el mundo de la Física Subatómica), las simetrías están directamente ligadas con la dinámica de los sistemas estudiados. No es demasiado exagerado decir que las simetrías son la explicación más fundamental de las leyes físicas.

Empecemos por analizar un ejemplo matemático simple de cuán útiles pueden ser las consideraciones basadas en el estudio de las simetrías. Analicemos el gráfico de la figura 26

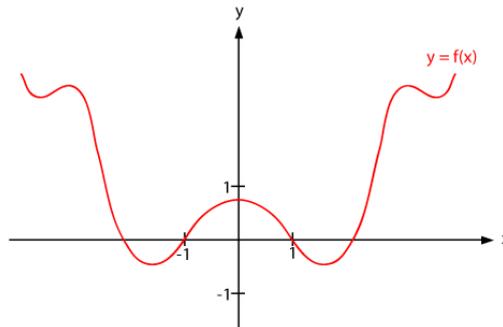


Figura 26: Función par

No sabemos cuál es, exactamente su expresión funcional, pero podemos afirmar que se trata de una función par,  $f(-x) = f(x)$ . Sin saber más, podemos estar seguros de cosas tales como (obsérvese que el producto de una función par por una impar resulta impar y que la derivada de una función par es una función impar):

$$\int_{-a}^a x f(x) dx = 0, \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=-b} = - \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=b}, \quad \int_{-c}^c f(x) dx = 2 \int_0^c f(x) dx,$$

### III.1 SIMETRÍAS, GRUPOS Y LEYES DE CONSERVACIÓN

---

con  $a, b$  y  $c$  números reales arbitrarios.

En la antigüedad, los griegos pensaban que las simetrías debían reflejarse directamente en los movimientos de objetos: por ejemplo, las estrellas debían moverse en trayectorias circulares, porque éstas son las trayectorias más simétricas en un plano. Pero resulta que los planetas no describen órbitas circulares, sino elípticas. Newton comprendió que las simetrías fundamentales se reflejan en las ecuaciones de movimiento, aunque no necesariamente en soluciones particulares de esas ecuaciones. La ley de gravitación universal de Newton tiene simetría esférica (la fuerza es la misma en todas las direcciones, depende sólo de la distancia entre las masas interactuantes) pero las órbitas de los planetas no tienen la misma simetría. Por eso, observando los fenómenos físicos no es tan fácil detectar las simetrías detrás de los mismos y escribir las ecuaciones que se derivan de ellas. Sin embargo, además de Newton, Einstein y Dirac, por ejemplo, fueron capaces de hacerlo.

Precisemos un poco más qué se entiende por simetría: es una transformación que puede realizarse sobre un sistema y que lo deja invariante, es decir, lo lleva a una configuración que es indistinguible de la que tenía antes de ser transformado. En el caso de la función de la figura 26, cambiar el signo del argumento es una operación de simetría, que deja invariante a la función considerada.

Un ejemplo geométrico lo constituyen las simetrías de rotación de un triángulo equilátero. Si el triángulo es rotado en sentido contrario al de las agujas de un reloj en  $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ , alrededor de un eje perpendicular al plano que pase por el punto donde se cruzan sus tres "alturas", el triángulo vuelve a ser el mismo. Llamaremos a esta primera transformación  $R_{\frac{2\pi}{3}}$ . Otra transformación de simetría consiste en dejarlo como está (una transformación muy obvia, que se conoce como la transformación idéntica o identidad) ( $R_0 = I$ ). También pueden hacerse, sucesivamente, dos rotaciones como la  $R_{\frac{2\pi}{3}}$  ya mencionada, cosa que da por resultado una rotación en  $240^\circ$  ( $R_{\frac{4\pi}{3}}$ ). En realidad, la acción sucesiva de cualquier número de ellas, también es una simetría: el triángulo permanece invariante. Por supuesto, hacer tres rotaciones en  $\frac{2\pi}{3}$  en el mismo sentido es lo mismo que aplicar la transformación idéntica. Hacer una rotación en  $\frac{2\pi}{3}$  en sentido antihorario es como rotar  $\frac{4\pi}{3}$  en sentido horario y así siguiendo, de modo que hay tres rotaciones distintas. Estas tres tienen todas las propiedades que caracterizan a un **grupo** de simetría (en este caso, se trata del grupo cíclico  $C_3$ ).

En general, el conjunto de las transformaciones de simetría de un dado sistema y su operación de composición deben tener las siguientes propiedades (aquí se entiende que, en la composición, se aplica primero la transformación que aparece a la derecha):

1. Clausura de la ley de composición: Si  $R_i$  y  $R_j$  están en el conjunto de simetrías, su aplicación sucesiva,  $R_i R_j$ , también debe estar en él, para todos los posibles pares de transformaciones  $R_i$  y  $R_j$ .
2. Existencia de la identidad: existe un elemento  $I$  en el conjunto, tal que  $I R_i = R_i I = R_i$  para todo  $R_i$ .
3. Existencia de la inversa: para todo  $R_i$  en el conjunto existe un elemento, también perteneciente al conjunto, que llamaremos  $R_i^{-1}$  tal que  $R_i R_i^{-1} = R_i^{-1} R_i = I$ .

4. Asociatividad de la composición:  $R_i(R_j R_k) = (R_i R_j) R_k$ , para todas las transformaciones  $R_i, R_j, R_k$  en el conjunto.

Estas son las propiedades que definen la estructura algebraica conocida como **grupo**. Nótese que aunque, en nuestro ejemplo, la ley de composición es conmutativa, la definición de grupo no lo exige. En general, no lo es. Si lo es, el grupo se llama **abeliano**. Si no, se lo llama **no-abeliano**. Por ejemplo: las traslaciones en el espacio de tres dimensiones constituyen un grupo abeliano, pero las rotaciones en el mismo espacio, no.

Los grupos pueden ser **finitos**, como en nuestro ejemplo, donde el grupo ( $C_3$ ) contiene sólo tres elementos o **infinitos** (como el grupo de los enteros, entendiendo la suma usual como la ley de composición).

Finalmente, los grupos pueden ser **discretos** (cada elemento puede caracterizarse por un índice entero) como  $C_3$ , o el grupo de los enteros, o **continuos** (se necesitan uno o más parámetros continuos para caracterizar todos los elementos. Las rotaciones de ángulo arbitrario en el plano son un ejemplo de este último caso (un círculo es invariante frente a estas transformaciones). Por supuesto, todos los grupos finitos son discretos.

En Física, son particularmente importantes los grupos de matrices. Entre ellos, los más importantes son los grupos de matrices **unitarias** (matrices complejas  $U$  de  $n \times n$ , tales que  $U^\dagger U = U U^\dagger = I$ ). Como en todos los grupos de matrices, la ley de composición es, en este caso, el producto usual entre matrices. Este grupo se llama  $U(n)$  (grupo **unitario** de  $n \times n$ . Entre estas matrices, interesan, en general, las que tienen determinante 1 (son unimodulares), que forman un subgrupo, al cual se conoce como grupo unitario **especial**  $SU(n)$ . Si nos restringimos a matrices reales, las matrices que satisfacen la primera condición se llaman **ortogonales** y el grupo, grupo ortogonal  $O(n)$ . El subgrupo especial se anota  $SO(n)$ . Por ejemplo, las rotaciones en el espacio de tres dimensiones, pueden representarse por el grupo  $SO(3)$ .

Ejemplo de un grupo finito de matrices:

Las matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

constituyen un grupo finito (por lo tanto, discreto), abeliano, de tres elementos, como puede verificarse en la tabla que sigue:

·	$I$	$M_1$	$M_2$
$I$	$I$	$M_1$	$M_2$
$M_1$	$M_1$	$M_2$	$I$
$M_2$	$M_2$	$I$	$M_1$

Es fácil establecer una correspondencia entre este último grupo y el grupo  $C_3$  ( $I \Leftrightarrow I_{2 \times 2}, R_{\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow M_1, R_{\frac{4\pi}{3}} \Leftrightarrow M_2$ ). Todo grupo  $G$  de transformaciones puede representarse por un grupo de matrices. A cada elemento del grupo  $G$ , que anotaremos  $g$  puede

### III.1 SIMETRÍAS, GRUPOS Y LEYES DE CONSERVACIÓN

---

asociársele una matriz  $M_g$ , respetando la ley de composición: si  $gh = l$  (con  $g, h$  y  $l$  pertenecientes a  $G$ , entonces  $M_g M_h = M_l$ . Se dice que las matrices  $M$  constituyen una **representación** del grupo  $G$ . Por ejemplo, la teoría del espín surge de estudiar las representaciones matriciales del grupo  $SU(2)$  (matrices unitarias de  $2 \times 2$  con determinante igual a 1). Para elementos próximos a la identidad en ambos grupos, dichas representaciones coinciden con las del grupo de rotaciones en el espacio tridimensional. Veremos esto con más detalle en breve.

Por supuesto, dado un grupo, existen muchas posibles representaciones matriciales del mismo. Esas representaciones pueden ser **fieles**, si la relación entre elementos de  $G$  y matrices  $M_g$  es uno a uno, pero puede ocurrir que se asigne la misma matriz a más de un elemento. Por ejemplo, una representación posible para cualquier grupo es la llamada **representación trivial**: a todo elemento del grupo se le asigna 1, matriz de  $1 \times 1$ . A esta se la llama representación trivial y, por supuesto, no es fiel. Un ejemplo del caso contrario son las matrices de la ecuación (14), que constituyen una representación fiel del grupo de rotaciones del triángulo equilátero,  $C_3$ .

Todo grupo de matrices tiene, además de la representación trivial, una representación constituida por las propias matrices que definen al grupo (obviamente, fiel). Se la conoce como la representación de definición, o representación **fundamental**. Por ejemplo,  $SU(2)$  tiene representaciones de dimensiones 1 (trivial), 2 (fundamental), 3, 4, 5, ... (en general,  $2s + 1$ , con  $s$  semientero. Las representaciones de  $SU(2)$  coinciden con las de  $SO(3)$  si se admiten, para este último, representaciones no fieles aparte de la trivial. Sólo las representaciones de  $SU(2)$  con  $s$  entero son representaciones fieles de  $SO(3)$ . Esto es importante, porque la componente de espín de, por ejemplo, la función de onda para partículas no relativistas, está formada por vectores cuyas componentes se transforman con matrices de alguna representación de  $SU(2)$ . En particular, como veremos en breve, las partículas de espín  $1/2$  son vectores de la representación fundamental y se transforman como las componentes de vectores de la representación fundamental. En el modelo de quarks, los quarks son vectores de la representación fundamental de  $SU(3)$  de sabor y los hadrones lo son de otras representaciones de mayores dimensionalidades. En este caso, las transformaciones no son transformaciones de los puntos del espacio-tiempo, como en las rotaciones, sino transformaciones de los campos de la teoría (simetría interna).

Es fácil comprender que, a partir de dadas representaciones siempre puede formarse otra de dimensión superior. Por ejemplo, si un elemento del grupo está representado por  $M$  en una representación y por  $M'$  en otra, basta combinar ambas matrices como bloques de una tercera, para que esta última, de dimensión mayor, también represente al mismo elemento del grupo. Pero interesa determinar las llamadas **representaciones irreducibles**, que son aquéllas formadas por matrices que no se pueden llevar a la forma diagonal en bloques. Por ejemplo, la matriz que sigue es diagonal en bloques (un bloque

de  $2 \times 2$ , otro de  $1 \times 1$  y finalmente, uno de  $3 \times 3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

La importancia de las simetrías quedó claramente establecida a partir de 1917, cuando Emmy Noether (1882-1935) (se sugiere leer su biografía, por ejemplo, en [www.wikipedia.com](http://www.wikipedia.com)) demostró su famoso teorema, que puede resumirse como sigue: “Toda vez que existe una simetría continua existe, en la teoría clásica, una cantidad conservada (independiente del tiempo)”. Como ejemplos de aplicación de este teorema, podemos mencionar que la conservación de energía es debida a la invariancia de las leyes físicas con respecto a traslaciones temporales, la conservación de la cantidad de movimiento es debida a la invariancia de esas mismas leyes frente a traslaciones espaciales y la conservación de momento angular es debida a la invariancia frente a rotaciones en el espacio. La conservación de la carga eléctrica es debida a la invariancia de la Electrodinámica frente a transformaciones del grupo  $U(1)$ , que dan origen a la llamada simetría de gauge.

Hay una diferencia entre las tres primeras simetrías y esta última: la invariancia de gauge de la Electrodinámica no está asociada con una simetría del espacio-tiempo. Así, en Física Subatómica, pueden distinguirse dos tipos de simetrías: **simetrías espacio-temporales** y **simetrías internas**. Las teorías cuánticas de campos del Modelo Estándar se basan, como la Electrodinámica, sobre simetrías internas de gauge, caracterizadas por  $U(1)$  y otros grupos de simetría que, a diferencia de  $U(1)$ , son no abelianos. Veremos esto con más detalle en la Parte V de estos apuntes.

Otros ejemplos de simetrías internas (pero no entendidas como simetrías de gauge) son, por ejemplo, el grupo  $SU(3)$  de sabor del modelo de quarks en su formulación original y la simetría de isospín nuclear, que discutiremos en la Parte IV de estos apuntes.

## III.2. Rupturas de simetría

Las simetrías son tan valiosas, que aun las simetrías no exactas o rotas son útiles. Las simetrías pueden estar rotas en dos formas:

1. Pueden existir términos explícitos en el lagrangiano de la teoría, que no respetan la simetría y conducen a ecuaciones de movimiento no invariantes. Esos términos pueden aparecer en el lagrangiano clásico, como correcciones a la parte del mismo que sí es invariante, cuando estudiamos una simetría clásica que es sólo aproximada. También puede ocurrir que tales términos aparezcan como consecuencia de la

cuantización de la teoría que, clásicamente es invariante. En ese caso se los conoce como anomalías cuánticas. A este tipo de ruptura se la llama ruptura explícita.

2. Puede ocurrir que la acción y, por lo tanto, las ecuaciones de movimiento sean invariantes frente a una dada transformación, pero el estado de menor energía de la teoría (conocido como estado fundamental) no sea simétrico. Más explícitamente, este tipo de ruptura ocurre cuando, al variar algún parámetro, la solución de las ecuaciones de movimiento que es invariante frente a la simetría en cuestión deja de ser energéticamente favorable y, en cambio, empiezan a serlo otras que no permanecen invariantes al aplicarles la transformación, sino que se transforman unas en otras por la acción de la misma. Este tipo de ruptura se llama ruptura espontánea (o a la manera de Nambu-Goldstone). Aun cuando una cualquiera de estas soluciones es asimétrica, si se considera el conjunto de todas las soluciones asimétricas, la simetría está presente, porque la transformación lleva de unas a otras de estas soluciones. Por eso, en este caso, suele hablarse simetría oculta, o de simetría realizada a la manera de Nambu-Goldstone más que de simetría rota. Cuando, en cambio, tanto las ecuaciones de movimiento como el estado fundamental son simétricos se dice que la simetría está realizada a la manera de Wigner-Weyl.

Un primer ejemplo de simetría explícitamente rota es la que aparece en  $SU(3)$  de sabor o, equivalentemente, en la el modelo de la óctuple senda para los hadrones: Si la simetría fuese exacta, todos los hadrones que integran un mismo multiplete deberían tener la misma masa. Sin embargo, es un hecho experimental que esto no ocurre; aun cuando sus masas están más proximas entre sí que las masas de hadrones en diferentes multipletes, las primeras no son exactamente iguales. La diferencia de masas entre hadrones que integran un mismo multiplete puede atribuirse a la existencia de una ruptura explícita, debida a correcciones electromagnéticas, de la simetría  $SU(3)$  de sabor.

En cuanto al segundo tipo de ruptura, sólo diremos, por el momento, que una ruptura espontánea de simetría da origen a la aparición de bosones sin masa: los llamados bosones de Goldstone. En presencia de una invariancia de gauge, permite dar masas a las partículas en la teoría de las interacciones electrodébiles por medio del mecanismo de Higgs, como veremos en la Parte V de estos apuntes.

### III.3. Momento angular orbital y espín en Mecánica Cuántica no relativista

El momento angular, en tres dimensiones, puede escribirse como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

En Mecánica clásica, sus tres componentes pueden medirse simultáneamente y pueden tomar cualquier valor real. En Mecánica cuántica, en cambio, se transforma en un operador. Por ejemplo, su componente  $z$  está dada por

III.3 MOMENTO ANGULAR ORBITAL Y ESPÍN EN MECÁNICA  
CUÁNTICA NO RELATIVISTA

---

$$L_z = xp_y - yp_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right). \quad (15)$$

Las restantes son similares y pueden obtenerse permutando cíclicamente las variables en la expresión anterior ( $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow z$  y  $z \rightarrow x$ , es decir,

$$L_x = yp_z - zp_y = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right). \quad (16)$$

$$L_y = zp_x - xp_z = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right). \quad (17)$$

Es fácil verificar que dos cualesquiera de estas componentes no conmutan entre sí, sino que satisfacen, por ejemplo,

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

y permutaciones cíclicas. El conjunto de relaciones de conmutación puede sintetizarse en:

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar L_k. \quad (18)$$

Los símbolos  $\epsilon_{ijk}$  se conocen como las componentes del tensor de Levi Civita. Toman el valor 0 si dos de los subíndices coinciden, 1 si  $i = 1$ ,  $j = 2$  y  $k = 3$  o cualquier permutación cíclica y  $-1$  para las restantes permutaciones.

Dado que las componentes diferentes del momento angular no conmutan, no pueden medirse simultáneamente y, por lo tanto, sólo pueden usarse para caracterizar el estado cuántico los autovalores de una de ellas. Por convención, se elige caracterizar al estado mediante los autovalores de  $L_z$ .

Existe un operador que conmuta con todas las componentes de  $\vec{L}$ : se lo llama operador de Casimir y está dado por  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ . En conclusión, al realizar una medida podrán determinarse simultáneamente el autovalor de una componente del momento angular, por ejemplo, el autovalor de  $L_z$ , que llamaremos  $m$ , y el autovalor de  $L^2$ , que llamaremos  $\lambda$ .

Así, cada estado queda caracterizado por dos números cuánticos:  $\lambda$  y  $m$  y lo escribiremos  $|l; m\rangle$ , de modo que  $L^2|l; m\rangle = \hbar^2|l; m\rangle$  y  $L_z|l; m\rangle = \hbar m|l; m\rangle$ . Además, puede mostrarse que  $m$  puede ser entero o semientero y puede variar desde  $-l$  hasta  $l$ , como sigue:

Si se definen los llamados operadores escalera

$$L_+ = L_x + iL_y, \quad L_- = L_x - iL_y,$$

se demuestra fácilmente (ver trabajo práctico número III) que  $[L^2, L_+] = 0 = [L^2, L_-]$ ,  $[L_z, L_+] = +\hbar L_+$  y  $[L_z, L_-] = -\hbar L_-$ . Como consecuencia, se tiene (de ahí el nombre escalera que reciben  $L_+$  y  $L_-$ ):

$$L_z L_+ |\lambda; m\rangle = (m + 1)\hbar L_+ |\lambda; m\rangle$$

### III.3 MOMENTO ANGULAR ORBITAL Y ESPÍN EN MECÁNICA CUÁNTICA NO RELATIVISTA

$$L_z L_- |\lambda; m \rangle = (m - 1) \hbar L_- |\lambda; m \rangle$$

es decir: si se aplica el operador de subida sobre un autovector de  $L_z$  correspondiente al autovalor  $m$  se obtiene un autovector del mismo operador de autovalor  $m + 1$ . Si comenzamos a aplicar el operador de subida a partir de un dado valor de  $m$ , podremos hacerlo un número finito de veces, ya que  $L_z^2 = L^2 - L_x^2 - L_y^2 \leq L^2 \rightarrow m^2 \leq \lambda$  y se debe llegar a un paso en que  $L_+ |\lambda; l \rangle = 0$ . Similarmente, aplicando el operador escalera de bajada, llegaremos a un estado tal que  $L_- |\lambda; -l' \rangle = 0$ .

De las relaciones (demostradas en el trabajo práctico número 3):

$$L_+ L_- = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z$$

$$L_- L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$$

resulta que  $\lambda = \hbar^2 l(l + 1)$  y  $\lambda = \hbar^2 l'(l' + 1)$ , por lo que se tiene  $l = l'$  y el número total de valores de  $m$  posibles es  $2l + 1$ . Resumiendo: los autovalores de  $L^2$  tienen la forma  $\hbar^2 l(l + 1)$  y, para cada  $l$  dado, la proyección  $L_z$  toma  $2l + 1$  valores, desde  $-l$  hasta  $l$ , como se muestra en la figura 27. Obsérvese que  $2l + 1$  debe ser un número natural, de modo que  $l$  puede, en principio, ser entero o semientero. Este es un tipo de cuantización distinta a la de energías: sólo algunas orientaciones del impulso angular están permitidas; se trata, por lo tanto, de un caso de cuantización espacial.

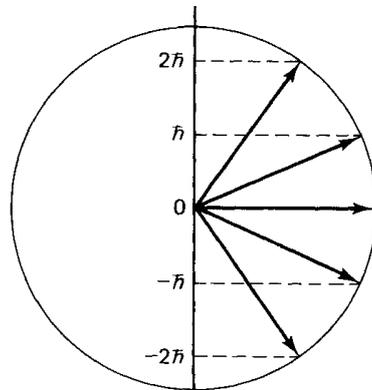


Figura 27: Posibles orientaciones del vector momento angular para  $l = 2$

Si el Hamiltoniano del sistema es central (sólo depende de la distancia y no de los ángulos), todos los estados correspondientes a un dado valor de  $l$  tendrán la misma energía, aunque correspondan a distintos valores de  $m$  (o sea, a distintas proyecciones del impulso angular en dirección  $z$ ). Se dirá, en ese caso, que todos ellos forman un multiplete o que son estados degenerados en energía. Todos los estados del multiplete corresponderán a una misma energía, dado que el Hamiltoniano sólo distingue entre distintos valores de  $l$  y no entre valores de  $m$ . En el caso de potenciales centrales basta, entonces, el número cuántico  $l$  para caracterizar los estados propios del sistema y suele llamarse a los estados con la siguiente nomenclatura:  $s(l = 0)$ ,  $p(l = 1)$ ,  $d(l = 2)$ ,  $f(l = 3)$ ,  $g(l = 4)$ .

### III.3 MOMENTO ANGULAR ORBITAL Y ESPÍN EN MECÁNICA CUÁNTICA NO RELATIVISTA

---

En el caso del momento angular orbital, los valores de  $m$  permitidos resultan ser sólo los enteros (los semienteros no son admisibles si se impone que las funciones de onda sean univaluadas) y, por lo tanto, también los  $l$ 's deben ser enteros, como veremos a continuación. Más adelante encontraremos, al estudiar el espín, que esta restricción no existe en ese caso.

Tomemos, por ejemplo, un problema con simetría cilíndrica. Eligiendo coordenadas cilíndricas,

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z$$

se tiene,  $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$  y, dado que la función de onda debe ser periódica, con período  $2\pi$ , los valores admisibles de  $L_z$  resultan discretos. En efecto, la ecuación que satisfacen los autovectores es:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \varphi(\rho, \phi, z) = m \varphi(\rho, \phi, z). \quad (19)$$

Debido a la independencia de la ecuación de  $\rho$  y  $z$ , las autofunciones sólo dependen de  $\phi$ , y tienen la forma

$$\varphi(\phi) = A e^{im\phi}.$$

La constante  $A$  puede determinarse por normalización. Pero lo importante es que los valores de  $m$  admisibles, dado que las autofunciones deben ser univaluadas,  $\varphi(2\pi) = \varphi(0)$ , son  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Hasta aquí, hemos representado el momento angular como un operador diferencial, que actúa sobre la función de onda, derivándola y multiplicándola. Pero también existen representaciones del operador momento angular en términos de matrices: son las representaciones matriciales del grupo  $SU(2)$ .

En Física Subatómica son particularmente importantes los llamados grupos de Lie: se trata de grupos "suaves", tales que todos sus elementos pueden construirse componiendo elementos próximos a la identidad. En estas condiciones, si buscamos representaciones del grupo, bastará con encontrar matrices que representen a los elementos del grupo próximos a la identidad. La representación de un elemento cualquiera de un grupo de Lie se obtendrá por exponenciación de matrices próximas a la identidad, que representen, a su vez, a los elementos del grupo próximos a  $I$ . Así, para un elemento  $A$  arbitrario del grupo, la matriz  $D(A)$  que lo representa estará dada por

$$D(A) = e^{-i \sum_a t_a T_a},$$

donde  $T_a$  son las matrices que representan una base para los elementos cercanos a la identidad y los  $t_a$  son parámetros reales. Las matrices  $T$  constituyen una estructura llamada álgebra de Lie con la operación de conmutación. Para que  $D(A)$  sea unitaria, las matrices  $T$  deben ser autoadjuntas. Además, si  $D(A)$  debe ser unimodular, las matrices  $T$  deben tener traza nula.

Como ya hemos dicho, el estudio del momento angular orbital y el del espín está basado en la búsqueda de las representaciones irreducibles del álgebra de Lie del grupo de

### III.3 MOMENTO ANGULAR ORBITAL Y ESPÍN EN MECÁNICA CUÁNTICA NO RELATIVISTA

---

simetría asociado. Se trata de las representaciones del álgebra de  $SU(2)$ , que resultan ser las mismas que las del álgebra de  $SO(3)$  (grupo de rotaciones en tres dimensiones).

De la construcción de las representaciones para el momento angular intrínseco, o espín, que es idéntica a la que realizamos para el momento angular orbital, también resulta que las representaciones irreducibles pueden caracterizarse por los autovalores de  $\vec{S}^2$ , que tienen la forma  $s(s+1)$  y los autovalores de  $S_z$ , que anotaremos  $m_s$ . Para un dado valor de  $s$ , los valores de  $m_s$  pueden variar entre  $-s$  y  $s$ , de a uno, de modo que, para cada  $s$ , el correspondiente multiplete tiene  $2s+1$  componentes pero, a diferencia de lo que ocurría con el impulso angular orbital, aquí los valores de  $s$  pueden ser tanto enteros como semienteros, porque la parte de espín de la función de onda no tiene dependencia con las coordenadas y, en particular, no depende del ángulo.

Ejemplo: partícula cuántica no relativista de espín  $1/2$ . La representación caracterizada por  $s = 1/2$  admite valores del autovalor de  $S_z$  dados por  $m_s = -1/2, 1/2$ . Se trata de una representación de dimensión 2 (la representación fundamental de  $SU(2)$ ), en la cual las tres componentes del espín pueden representarse por las matrices:

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Las tres matrices de  $2 \times 2$  que aparecen en la representación fundamental de las tres componentes del espín se conocen como matrices de Pauli y se anotan, respectivamente  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$ . Las partículas cuyas funciones de onda se transforman frente a rotaciones como vectores de esta representación se llaman **espinores de Pauli** o espinores no relativistas de espín  $1/2$ . Dichas funciones de onda se escriben como combinaciones lineales de los dos espinores base:

$$|s = 1/2; m_s = 1/2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s = 1/2; m_s = -1/2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, para un espinor de Pauli general se tiene:

$$\psi(\vec{r}) = \alpha(\vec{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta(\vec{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las funciones de onda pueden normalizarse imponiendo  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Luego de eso,  $|\alpha|^2$  representará la probabilidad de encontrar al espinor con proyección del espín en dirección  $z$  igual a  $+1/2$ . Del mismo modo,  $|\beta|^2$  será la probabilidad de encontrarlo con proyección de espín  $-1/2$  a lo largo del eje  $z$ .

Los vectores de la representación trivial se denominan singuletes de  $SU(2)$  y son invariantes frente a la acción del grupo. Los vectores de espín 1 son vectores de 3 componentes, que se transforman con matrices de la representación  $s = 1$ , de  $3 \times 3$  ya que, aquí,  $2s+1 = 3$ .

El momento angular total de un espinor estará dado por la suma de su momento angular orbital más su momento angular de espín:  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ .

El espín es un ejemplo importante de cómo se construyen representaciones irreducibles para las transformaciones del álgebra de un grupo de Lie. Aquí, se trata del álgebra de  $SU(2)$ , que es el grupo unitario asociado con la simetría de rotación en el espacio de tres dimensiones. En la siguiente Parte de los apuntes veremos cómo la construcción que acabamos de realizar se repite, exactamente, para explicar, en Física Nuclear, la similitud entre protón y neutrón, postulando que se trata de dos componentes de un mismo multiplete de la representación fundamental del llamado grupo  $SU(2)$  de isospín nuclear, entre las cuales las interacciones fuertes no distinguen. La principal diferencia entre espín e isospín es que el último no está asociado con una simetría del tiempo ni del espacio (como las rotaciones espaciales, en el caso del espín) sino que se interpreta como una simetría interna. Cuando estudiemos las teorías de las interacciones fundamentales, en la parte V, veremos que las simetrías internas, en general basadas en grupos distintos de  $SU(2)$  y entendidas como simetrías locales o de gauge constituyen la base de todas esas teorías.

### III.4. Ejercicios propuestos

1. Determine si forman grupo (en caso de ser así, determine si el grupo es abeliano):
  - a) El conjunto de todos los números complejos de módulo 1 con respecto al producto usual entre complejos ( $SU(1)$ ).
  - b) El conjunto de las tres raíces cúbicas de la unidad, con la multiplicación usual entre complejos. Encontrar una representación fiel de este grupo, en términos de matrices de  $2 \times 2$ .
  - c) El conjunto de las matrices complejas unitarias de  $n \times n$  de determinante igual a 1 con el producto usual de matrices ( $SU(n)$ ).
2. a) Estudie la tabla de composición correspondiente a las rotaciones de un cuadrado alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro.
  - b) Encuentre un conjunto de matrices de  $2 \times 2$  que constituyan una representación del grupo del inciso anterior.
3. Para el operador impulso angular, cuyas componentes están definidas como  $L_x = -i\hbar(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y})$ ,  $L_y = -i\hbar(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z})$  y  $L_z = -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$ . Demostrar:
  - a) Que  $[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar L_k$ , donde los símbolos  $\epsilon_{ijk}$ , que se conocen como las componentes del tensor de Levi Civita, toman el valor 0 si dos de los subíndices coinciden, 1 si  $i = 1, j = 2$  y  $k = 3$  o cualquier permutación cíclica y  $-1$  para las restantes permutaciones.
  - b)  $[L^2, L_+] = 0 = [L^2, L_-]$ ,  $[L_z, L_+] = +\hbar L_+$  y  $[L_z, L_-] = -\hbar L_-$ . Como consecuencia,  $L_z L_+ |\lambda m\rangle = (m+1)\hbar L_+ |\lambda m\rangle$  y  $L_z L_- |\lambda m\rangle = (m-1)\hbar L_- |\lambda m\rangle$ .
  - c)  $L_+ L_- = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z$  y  $L_- L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$ .

### III.4 EJERCICIOS PROPUESTOS

---

4. En Mecánica Cuántica no relativista, con las tres componentes del espín pueden asociarse los operadores  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$  y  $\hat{S}_z$ . En una base de autofunciones de  $\hat{S}_z$ , los mismos se representan por

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} .$$

- a) Supongamos que queremos medir  $S_z$  para una partícula en el estado  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ . Qué resultados podemos obtener y cuál es la probabilidad de cada uno de ellos?
- b) Para la misma partícula y el mismo estado, queremos medir  $S_x$ . Qué resultados podemos obtener y con qué probabilidades?

**Parte IV**  
**Física nuclear**



Las referencias [13, 14] son muy útiles para el estudio de los temas de esta sección.

## IV.1. Fenomenología de los núcleos

Como ya hemos visto, el experimento de Rutherford mostró que cada átomo posee una región central, con carga eléctrica positiva igual al valor absoluto de la carga de los electrones circundantes y donde reside casi el total de la masa del átomo. También explicamos que la necesidad de asegurar la consistencia entre la carga y la masa medidas en núcleos distintos del núcleo de hidrógeno y, sobre todo, en los núcleos más pesados, condujo a admitir, dentro del núcleo, no sólo la existencia de protones, sino también de neutrones. Ambos tipos de partículas se conocen como nucleones. Mientras cada protón tiene una carga positiva igual, en valor absoluto, a la carga del electrón  $e$ , los neutrones son, como su nombre lo indica, partículas neutras. Las masas de ambos nucleones son muy similares, aunque el neutrón es levemente más pesado:  $m_p c^2 = 938,27231(28) MeV$  y  $m_n c^2 = 939,56563(28) MeV$ . El tamaño de los núcleos es extremadamente pequeño: del orden de  $1 fm$ , o sea,  $10^5$  veces menor que el tamaño típico de los átomos.

En virtud de los hechos que acabamos de recordar, cada núcleo puede caracterizarse en forma unívoca por su carga eléctrica y su masa. Dar su carga eléctrica es equivalente a dar el número de protones que lo integran. A este número entero se lo conoce como número atómico y se lo anota  $Z$ . En cuanto a la masa del núcleo, la misma queda determinada si se da, además, el número total de nucleones, llamado número másico o de masa y anotado con  $A$ . Notar que, equivalentemente, puede darse, en lugar de  $A$ , el número de neutrones, llamado número neutrónico, y anotado  $N$ . Por ejemplo, un átomo que se anota  ${}^A X^Z$  (o, a veces,  ${}^A_Z X$ ) representa el núcleo del elemento  $X$ , con número atómico  $Z$  y número másico  $A$ , es decir, un núcleo formado por  $Z$  protones y  $A - Z$  neutrones.

Así, en primera aproximación y en el marco de la mecánica no relativista, diríamos que

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n .$$

En realidad, los valores medidos para las masas nucleares indican que la masa de un núcleo es menor que la suma de las masas de sus constituyentes. En lugar de la igualdad anterior vale, entonces, la desigualdad:

$$M(A, Z) < Zm_p + (A - Z)m_n .$$

Esto explica por qué un núcleo aislado no puede simplemente partirse en sus nucleones constituyentes: tal proceso violaría la conservación de la energía. El déficit de masa se define como la cantidad negativa

$$\Delta M = M(A, Z) - (Zm_p + (A - Z)m_n) < 0$$

y se lo asocia con una energía de ligadura negativa, cuyo valor absoluto,  $B_{A,Z}$ , se define como sigue:

$$B_{A,Z} = -\Delta M c^2 = (Zm_p + (A - Z)m_n)c^2 - M(A, Z)c^2 > 0 .$$

#### IV.1 FENOMENOLOGÍA DE LOS NÚCLEOS

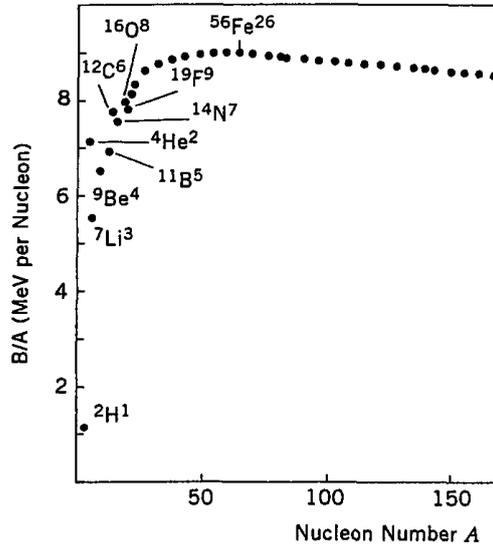


Figura 28: Dependencia con  $A$  de la energía de ligadura por nucleón

Cuanto mayor sea  $B$ , más negativa será la energía de ligadura y, por lo tanto, el núcleo será más estable.

También resulta útil definir el valor absoluto de la energía de ligadura por nucleón, que es la energía promedio que debe entregarse para liberar un nucleón del núcleo:

$$\frac{B_{A,Z}}{A} = -\frac{\Delta M}{A} = \frac{(Zm_p + (A - Z)m_n - M(A, Z))c^2}{A} > 0. \quad (21)$$

Esta última cantidad ha sido medida para una gran número de núcleos estables y, aparte de ciertos detalles finos, que discutiremos más adelante, se ha encontrado que

1. Para núcleos no muy masivos ( $A \leq 20$ ),  $\frac{B}{A}$  oscila un poco, y crece rápidamente con  $A$ , para saturar después en unos  $9\text{MeV}$  por nucleón alrededor de  $A = 60$ ; para valores mayores de  $A$  la energía de ligadura por nucleón decae muy lentamente. Por lo tanto, para un gran rango de núcleos, puede aceptarse un valor promedio de  $\frac{B}{A} \sim 8\text{MeV}$  por nucleón (ver figura 28).

Esto indica que si pudiéramos darle, a un nucleón que está dentro del núcleo, una energía aproximada de  $8\text{MeV}$  podríamos, en principio, extraerlo del núcleo que integra. Teniendo en cuenta el principio de incerteza, podemos estimar la longitud de onda de tal nucleón, considerado como una partícula no relativista (dado que el nucleón es muy masivo, esta no es una mala aproximación). Así, considerando

$\lambda \sim 2\pi R$  y  $\frac{p^2}{2m} = \frac{B}{A}$ , junto con el principio de incerteza, resulta:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{p} = \hbar \sqrt{\frac{A}{2mB}}.$$

Usando  $\frac{B}{A} \simeq 8MeV$  se obtiene, para  $\frac{\lambda}{2\pi}$  un valor de  $1,6 fm$ . Entonces, la longitud de onda del nucleón es compatible con su existencia dentro del núcleo. Dicho de otro modo: es razonable pensar que partículas con esa longitud de onda existan en el núcleo. Un análisis similar sugiere que no puede haber electrones dentro del núcleo. En primer lugar, si estuvieran dentro del núcleo, debido a su masa mucho menor que la de los nucleones, una energía del orden de  $8GeV$  obligaría a tratarlos como relativistas, de modo que, con  $p = \frac{B}{cA}$ , se tendría,

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{B}.$$

Esta cuenta da por resultado un radio típico del orden de  $2,5 \times 10^{-14}m$ . En estas condiciones, sería poco natural pensar que el electrón pueda encontrarse dentro del núcleo (de dimensión típica  $1fm$ ). Para que pudiera estar confinado dentro de un radio del orden de  $1fm$ , la energía de ligadura de un electrón debería ser del orden de  $120MeV$ , muy por encima de la energía de ligadura típica de los núcleos. Este argumento es muy cualitativo, pero las observaciones nucleares más directas demuestran que, en efecto, no hay electrones dentro de los núcleos atómicos.

2. Otro hecho fenomenológico notable es el siguiente: si se considera a los núcleos como esféricos, el radio  $R_A$  de todos los núcleos resulta proporcional a la potencia  $1/3$  del número másico:

$$R_A = R_0 A^{1/3}, \quad R_0 \sim 1,2 fm.$$

Eso significa que si, además, se los considera homogéneos, el núcleo resulta tener una gran densidad,  $\rho = \frac{3m_p A}{4\pi R_0^3 A} \sim 10^{14} \frac{g}{cm^3}$ , independiente del número másico.

## IV.2. Modelos para la estructura nuclear

Para estudiar esta sección, se aconseja recurrir a las referencias [13, 14, 15].

Aparte de determinar las propiedades de los núcleos de modo fenomenológico, los experimentos de dispersión proveen otra información sobre el carácter de las fuerzas nucleares. En primer lugar, indican que la fuerza nuclear no puede ser de origen electromagnético dado que, por ejemplo, el núcleo del deuterón tiene sólo un protón y un neutrón, y este último, por ser neutro, no participa de las interacciones electromagnéticas. Contrariamente, la fuerza electromagnética entre protones, que es siempre repulsiva,

tiende a desestabilizar los núcleos. La fuerza débil es, como la gravitatoria, demasiado pequeña para contrarrestar esa repulsión. A partir de estos razonamientos, Yukawa postuló la existencia de un nuevo tipo de fuerza, que llamó fuerte, pero nosotros venimos llamando fuerza nuclear, para recordar que no se trata más que de una fuerza efectiva remanente a energías bajas, proveniente de la verdadera fuerza fuerte entre los quarks que constituyen los nucleones.

Sabemos que la fuerza nuclear tiene que tener un alcance extremadamente corto, no mucho mayor que el tamaño típico de un núcleo porque, de otro modo, afectaría el excelente acuerdo entre la teoría y el experimento en Física Atómica. Esto sugirió a Yukawa la introducción del potencial que lleva su nombre y que ya hemos estudiado (ver ejercicios de la Parte II). Sin embargo, tampoco este potencial es capaz de describir todas las características de la fuerza nuclear reveladas por los experimentos.

En general, para mantener a los nucleones ligados dentro del núcleo, la fuerza nuclear debe ser atractiva. Sin embargo, en experimentos de dispersión de partículas con energías altas contra núcleos, se encontró que la fuerza nuclear es repulsiva a muy cortas distancias y sólo a distancias algo mayores se hace atractiva. Conceptualmente, este resultado es muy importante porque, si la fuerza fuese siempre atractiva, el núcleo colapsaría. Sin embargo, para energías no demasiado altas, puede ignorarse el efecto de la repulsión y considerar sólo un pozo de potencial, como veremos en los modelos efectivos que estudiaremos más adelante.

Queda claro, entonces, que una descripción de primeros principios para la fuerza nuclear, que reproduzca todas las características de la misma mostradas por el experimento, sería extremadamente complicada. Por eso, para describir la fuerza nuclear se ha recurrido, históricamente, a modelos efectivos de distintos tipos, cada uno de los cuales describe bastante bien ciertos aspectos de la fenomenología de los núcleos, pero no otros.

Cuando se trata de describir los posibles estados ligados de los nucleones dentro de núcleo, pueden proponerse modelos no relativistas. Veremos, a continuación, algunos ejemplos.

### IV.2.1. Modelos efectivos

#### Modelo de la gota líquida

Se trata de un modelo puramente fenomenológico, cuyos parámetros libres pueden ajustarse con las medidas experimentales. Aunque no es cuántico ni relativista, permite reproducir los aspectos más notables de la fenomenología nuclear que hemos detallado en la sección IV.1. El modelo trata al núcleo como un todo, ignorando las propiedades individuales de los nucleones, que se piensan como “moléculas” que forman una gota macroscópica, e intenta dar una expresión para la energía de ligadura.

Recordemos que

$$M(A, Z)c^2 = (Z m_p + N m_n) c^2 - B_{A,Z}.$$

Como en una gota, se supone que el núcleo tiene una zona central, donde los nucleones están fuertemente ligados y otra superficial, menos estable, ya que los nucleones de

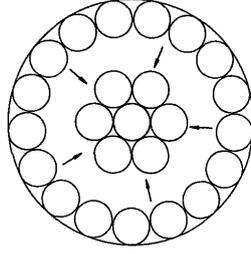


Figura 29: Modelo de la gota líquida

superficie no tienen vecinos en el exterior (ver figura 29). Para reproducir estos hechos cualitativos en primera aproximación, y recordando que  $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$ , se escribe el valor absoluto de la energía de ligadura como suma de un término de volumen más uno, desestabilizante, de superficie y un tercer término, que tiene en cuenta la repulsión coulombiana (también desestabilizante) entre protones:

$$B_{A,Z} = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}.$$

Estos tres términos no bastan, sin embargo, para reproducir otros hechos experimentales: los núcleos livianos con  $N = Z$  son más estables que el resto. Además, los núcleos par-par son más estables y los impar-impar son muy escasos. Para tener en cuenta todos estos hechos, se agregan dos términos más a la expresión fenomenológica del valor absoluto de la energía de ligadura, que ahora se escribe:

$$B_{A,Z} = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_4 \frac{(N - Z)^2}{A} \mp a_5 A^{-\frac{3}{4}},$$

donde el último término se toma con signo positivo para los núcleos par-par (más estables) y signo negativo para los impar-impar (más inestables). Para los restantes núcleos,  $a_5$  se toma igual a cero. La potencia de  $A$  en este término se ajusta experimentalmente.

Los cinco coeficientes también se determinan, junto con dicha potencia, ajustando las masas de algunos núcleos, ya que

$$M(A, Z) = (A - Z)m_n + Zm_p - \frac{a_1}{c^2} A + \frac{a_2}{c^2} A^{\frac{2}{3}} + \frac{a_3}{c^2} \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{a_4}{c^2} \frac{(N - Z)^2}{A} \pm \frac{a_5}{c^2} A^{-\frac{3}{4}}.$$

Esta última expresión se conoce como fórmula semiempírica de masa de Bethe-Weizsäcker. Del ajuste de la misma resultan:  $a_1 \sim 15,6 \text{ MeV}$ ,  $a_2 \sim 16,8 \text{ MeV}$ ,  $a_3 \sim 0,72 \text{ MeV}$ ,  $a_4 = 23,3 \text{ MeV}$  y  $a_5 = 34 \text{ MeV}$ .

Utilizándola, por ejemplo, para núcleos par-impar, se predice que los núcleos más estables son aquellos que tienen menos protones que neutrones. (ver ejercicio propuesto al final de este capítulo).

Pero, una vez ajustados los parámetros con algunos núcleos, las masas medidas para todos los restantes deberían ajustarse de modo adecuado, cosa que no sucede para los núcleos más livianos. Ese desacuerdo se atribuye a efectos cuánticos, que no han sido tenidos en cuenta hasta aquí. Los modelos que siguen intentan introducir tales efectos.

### Modelo del gas de Fermi

El modelo del gas de Fermi fue uno de los primeros intentos de realizar una descripción de la estructura nuclear en el marco de la Mecánica Cuántica (no relativista). En general, si se estudia la ecuación de Schrödinger para un nucleón, en presencia de cierto potencial, los niveles de energía accesibles al nucleón serán discretos, en forma similar al modo en que los electrones pueden ocupar ciertos niveles discretos de energía, debido a la existencia del potencial central coulombiano. La gran diferencia entre ambos casos es que, para electrones ligados en el interior de átomos sabemos cuál es la forma del potencial electromagnético. La forma exacta del potencial nuclear no se conoce. En realidad, deberíamos ser capaces de hacer un cálculo autoconsistente, en un potencial creado por los propios nucleones. Pero obsérvese que tal potencial, para núcleos formados por tres o más nucleones, no sería simplemente un potencial de interacción entre dos partículas, como el coulombiano o el gravitatorio, sino uno extremadamente complicado.

En el modelo del gas de Fermi, se describe al núcleo como un gas de nucleones **no relativistas**, confinados en una pequeña región del espacio: el volumen nuclear. El potencial considerado es el de un pozo infinito. Las condiciones de anulación (condiciones de contorno de Dirichlet) que deben satisfacer las funciones de onda en el borde del pozo harán que los niveles de energía accesibles a los neutrones sean niveles discretos.

Ahora bien: como los nucleones son fermiones (partículas de espín  $1/2$ , en cada estado discreto de energía podrán coexistir, a lo sumo, dos de ellos, con proyecciones opuestas de espín. Así, se irán llenando los estados accesibles hasta agotar el número total de nucleones que integran el núcleo. El último estado lleno se conoce como nivel de energía de Fermi ( $E_F$ ). El correspondiente impulso se llama impulso de Fermi, y viene dado por  $p_F^2 = 2mE_F$ , donde  $m$  es la masa del nucleón. El siguiente nivel puede estar completamente vacío o semilleno.

Tomaremos un potencial de valor  $E_0 < 0$  en el interior, que se hace infinito en los bordes de una caja de lado  $L$  y resolveremos la ecuación en coordenadas cartesianas, exigiendo que la función de onda se anule en  $x = 0$  y  $x = L$  y las mismas condiciones en las direcciones  $y$  y  $z$ . Midiendo las energías con respecto a  $E_0$ , si queremos determinar los niveles accesibles tendremos, entonces, que resolver:

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{-\hbar^2 \Delta \varphi(x, y, z)}{2m} = E \varphi(x, y, z),$$

con las condiciones  $\varphi(0, y, z) = \varphi(L, y, z) = 0$ ,  $\varphi(x, 0, z) = \varphi(x, L, z) = 0$  y  $\varphi(x, y, 0) = \varphi(x, y, L) = 0$ .

Las autofunciones que satisfacen esta ecuación puede encontrarse proponiendo que tales autofunciones se escriben como productos de una función que depende sólo de  $x$ , por otra que sólo depende de  $y$ , por una tercera que sólo depende de  $z$  (separación de variables). Reemplazando tal propuesta en la ecuación diferencial resulta que las autofunciones pueden escribirse como

$$\varphi(x, y, z) = A \sin \frac{p_x x}{L} \sin \frac{p_y y}{L} \sin \frac{p_z z}{L},$$

## IV.2 MODELOS PARA LA ESTRUCTURA NUCLEAR

donde  $p_x = \frac{n_1 \hbar \pi}{L}$ ,  $p_y = \frac{n_2 \hbar \pi}{L}$  y  $p_z = \frac{n_3 \hbar \pi}{L}$ , con  $n_1, n_2, n_3 = 1, \dots, \infty$ .

Tomando la aproximación de gran volumen, es posible encontrar una relación entre el impulso de Fermi de, por ejemplo, los protones y la densidad de protones en el núcleo. En dicho límite, los impulsos accesibles tienden al continuo, las sumas sobre impulsos se transforman en integrales sobre  $1/8$  de la bola de radio  $p_F$ , y el número de estados entre  $\vec{p}$  y  $\vec{p} + d\vec{p}$  es  $\frac{2L^3}{(h\pi)^3}$  (el factor 2 es debido a las dos proyecciones de espín), de modo que el número total de estados, igual al número total de protones, debe ser tal que  $Z = \int_0^{|p_F|} d^3p \frac{2V}{(h\pi)^3}$ . Por lo tanto, se tiene:

$$\rho_P = \frac{Z}{V} = \frac{|p_F|^3}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad (22)$$

donde  $V$  es el volumen nuclear. Inviertiendo esa expresión, se tiene  $p_F = (3\pi^2 \hbar^3 \rho_P)^{\frac{1}{3}}$  para protones y una expresión equivalente para los neutrones.

La energía de ligadura total del núcleo en su estado fundamental será la suma de las energías de todos sus protones y neutrones, tomadas hasta los respectivos niveles de Fermi:

$$E_{A,Z} = \frac{\pi V}{(\pi \hbar)^3} \int_0^{(3\pi^2 \rho_P)^{\frac{1}{3}} \hbar} \frac{p^4}{2m} dp + \frac{\pi V}{(\pi \hbar)^3} \int_0^{(3\pi^2 \rho_n)^{\frac{1}{3}} \hbar} \frac{p^4}{2m} dp$$

o bien, en términos de  $Z$  y  $A$ :

$$E_{A,Z} = A \frac{3}{5} \left( \left( \frac{Z}{A} \right)^{\frac{5}{3}} + \left( \frac{A-Z}{A} \right)^{\frac{5}{3}} \right) E_F.$$

Es fácil verificar (buscando el valor de  $Z$  para el cual se anula la derivada) que esta expresión tiene un mínimo para  $Z = \frac{A}{2}$ . De manera notable, pese a todas las aproximaciones, el modelo del gas de Fermi muestra que los núcleos son más estables cuando tienen igual número de protones y de neutrones y justifica, entonces, la aparición del término proporcional a  $a_4$  en la fórmula de Bethe-Weizsäcker. En el caso  $Z = N = \frac{A}{2}$ ,

$$E_{A, \frac{A}{2}} = A \frac{3}{5} 2^{-\frac{2}{3}} E_F,$$

y  $E_F$  puede calcularse volviendo a la ecuación (22), con  $V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A$  y  $Z = N = \frac{A}{2}$ . De allí resulta  $p_F = \frac{\hbar}{r_0} \left( \frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{1}{3}}$  y, finalmente:

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} \sim 33 \text{ MeV}.$$

Obsérvese que, del último resultado, se puede estimar, para los nucleones,  $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 6 \times 10^{-2}$ . Esto explica por qué una descripción no relativista del problema se acerca bastante a la realidad.

### Modelo de capas

Una descripción algo mejor de la estructura nuclear la da el modelo de capas. El mismo permite explicar la existencia de los llamados “números mágicos” que corresponden a núcleos muy estables. Se trata de reemplazar el pozo infinito por otro tipo de potencial, con simetría esférica (central). Uno de los potenciales más sencillos utilizados es el potencial de un oscilador armónico,  $U(r) = \frac{1}{2}m\omega^2r^2$ , donde  $r$  es la distancia al origen. En este caso, debemos resolver:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega^2r^2\right)\varphi(x, y, z) = E\varphi(x, y, z).$$

Mediante separación de variables (ver ejercicio propuesto al final de este capítulo), este problema se reduce al de resolver la ecuación de un oscilador armónico en cada dirección. Así se tiene, para las energías admisibles,

$$E_{n_1n_2n_3} = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2}\right),$$

con  $n = n_1 + n_2 + n_3$  y  $n_i = 0, 1, 2, \dots$  para  $i = 1, 2, 3$ .

Obsérvese que las energías sólo dependen de la suma de los tres números cuánticos (uno por cada dimensión). Por lo tanto, para un valor dado de la energía, hay distintas combinaciones de esos números y, en consecuencia, distintas funciones de onda, que conducen a un mismo autovalor. Al número de tales posibles combinaciones se lo conoce como la **degeneración**,  $g_n$ , del estado. Por ejemplo,  $n = 0$  tiene  $g_0 = 1$ . En efecto, la única posibilidad que conduce a este valor es  $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ . Para  $n = 1$ , se tienen tres posibles funciones de onda, correspondientes a  $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0$ ,  $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 0$  o bien  $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 1$ . Por lo tanto, este estado tiene degeneración  $g_1 = 3$ . En forma similar,  $g_2 = 6$ . Todas estas degeneraciones se duplican al tener en cuenta las dos proyecciones posibles para el espín del nucleón.

El resultado es que, en el núcleo, aparecen capas con energías y números de ocupación determinados, como ocurre en los átomos. Si se tienen  $Z$  protones, ellos irán ocupando los niveles de energía más bajos. En el estado  $n = 0$  se ubicarán 2. En  $n = 1$ , 6. En  $n = 2$ , 12 y en  $n = 3$ , 20. Cuando alguna de las capas esté completamente ocupada (se dice que está “cerrada”), el núcleo será más estable, ya que será necesario otorgarle una cantidad finita de energía para que un nucleón se ubique en la capa siguiente. Esto conduce a una mayor estabilidad para los núcleos con  $Z = 2, 8, 20, 40$ , que se conocen como números mágicos. Es claro que un núcleo con ambos números,  $Z$  y  $N$ , correspondientes a capas cerradas será aún más estable. Tales núcleos se conocen como doblemente mágicos. Lo es, por ejemplo el núcleo de  ${}^4_2\text{He}$ , con dos protones y dos neutrones. Sin embargo, los números mágicos predichos por el modelo no coinciden con los medidos, a partir de 40. Se necesita, entonces, modificar el modelo de algún modo para explicar tales efectos.

### Acoplamiento espín-órbita

Ya en la década de 1940 estaba claro que un potencial central puro no podía justificar la totalidad de los números mágicos medidos. En 1949, María Göppert Mayer y Hans

Jensen sugirieron que, en forma análoga a lo que ocurre en física atómica, el hamiltoniano que representa la dinámica de un nucleón dentro del núcleo debe contener, además de un potencial central, un término de acoplamiento espín-órbita, de modo que cada nucleón experimente un potencial total dado por:

$$V_{Tot} = V(r) - f(r)\vec{L} \cdot \vec{S}, \quad (23)$$

donde  $\vec{L}$  y  $\vec{S}$  son el momento angular orbital y el de espín, respectivamente (recuérdese que el momento angular total es  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ). En física atómica, la interacción espín-órbita tiene la misma forma que (23), pero con  $f(r) = 1$ . En ambos casos, el término extra en el hamiltoniano es distinto para cada una de las dos proyecciones del impulso angular total, que corresponden a autovalores  $j = l + \frac{1}{2}$  y  $j = l - \frac{1}{2}$ . En efecto, dado que  $\vec{J}^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$ , se tiene que  $\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2)$ . (Obsérvese que, en las expresiones anteriores, hemos usado que  $[\vec{L}, \vec{S}] = 0$ . Por lo tanto, para un estado de una partícula caracterizado por números cuánticos  $l, s, j, m_j$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle &= \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \\ &= \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}], \end{aligned} \quad (24)$$

que toma valores  $\frac{\hbar^2 l}{2}$ , para  $j = l + \frac{1}{2}$  y  $-\frac{\hbar^2(l+1)}{2}$ , para  $j = l - \frac{1}{2}$ . Así, estos dos estados que, en ausencia del acoplamiento espín-órbita serían degenerados, resultan separados en energías según

$$\Delta E_{n,l}(j = l + \frac{1}{2}) - \Delta E_{n,l}(j = l - \frac{1}{2}) = \frac{\hbar^2}{2} (2l + 1) \int d^3r |\varphi_{n,l}| f(r).$$

Vemos, entonces, que la separación entre niveles debida a este nuevo acoplamiento crece con el número cuántico  $l$ . El resultado es que, incluso, puede existir un cruce de niveles de energía, como muestra la figura 30. (En dicha figura, la notación es  $nLj$ ).

Este modelo, que no posee simetría esférica, permite explicar adecuadamente los momentos dipolares de los núcleos y, además, reproduce el número mágico 50, en lugar del erróneo 40 predicho por el modelo de capas simple en su versión de la sección anterior. Pero, para núcleos pesados, el acuerdo entre teoría y experimento no es del todo satisfactorio, aún incluyendo esta interacción espín-órbita. En especial, este modelo no es capaz de reproducir adecuadamente los momentos dipolares y, sobre todo, no explica los momentos cuadrupolares que caracterizan a tales núcleos.

### Rotaciones y vibraciones colectivas

Para describir los momentos cuadrupolares no nulos que presentan los núcleos pesados, Aage Bohr, Ben Mottelson y James Rainwater formularon el modelo que lleva sus nombres. En dicho modelo, el núcleo consta de una zona central, formada por nucleones

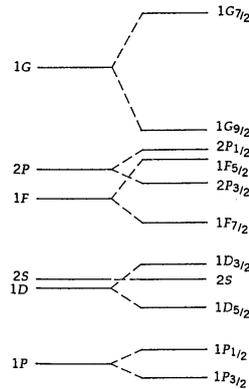


Figura 30: Efecto del acoplamiento espín-órbita

que se acomodan en capas cerradas y una zona externa, en que los nucleones (llamados nucleones de valencia) se comportan como las moléculas en la superficie de una gota. Los nucleones de valencia, al moverse en la superficie, deforman la zona central, que deja de ser esférica y, como consecuencia, cambian los estados accesibles para los nucleones de valencia, que dejan de ser los del modelo de capas. Este es un modelo que se conoce como “modelo colectivo” y puede ser pensado como un modelo de capas basado en un potencial que no es esféricamente simétrico, sino que produce rotaciones alrededor de ciertos ejes y vibraciones alrededor del estado de equilibrio.

Por ejemplo, puede suponerse que el núcleo es un elipsoide, de la forma  $ax^2 + by^2 + \frac{z^2}{ab} = R^2$ , donde los parámetros  $a$  y  $b$  miden la deformación con respecto a la esfericidad. Puede, entonces, elegirse el potencial promedio como:

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{para } ax^2 + by^2 + \frac{z^2}{ab} \leq R^2 \\ \infty & \text{para } ax^2 + by^2 + \frac{z^2}{ab} > R^2 \end{cases} \quad (25)$$

Ciertamente, potenciales como éste requieren recurrir a métodos numéricos para encontrar las funciones de onda y los correspondientes autovalores de energía y permiten ajustar de modo correcto las transiciones cuadrupolares ( $\Delta l = 2$ ) entre niveles nucleares.

Finalmente, vale la pena recalcar que todos los modelos considerados hasta aquí consideran que la simetría de isospín es exacta, es decir, no distinguen protones de neutrones (hemos hablado siempre de nucleones y hemos supuesto un tipo único de interacción para todos ellos, independientemente de su carga eléctrica). Si se tiene en cuenta, en cambio, la interacción electromagnética, deben introducirse nuevos términos de potencial en la ecuación de Schrödinger.

### IV.2.2. Independencia de carga e isospín nuclear

Se conoce como núcleos espejo a aquellos núcleos que tienen el mismo número másico, pero sus números de protones y neutrones intercambiados, es decir,  ${}^A X^Z$  y  ${}^A Y^{A-Z}$  son núcleos espejo. Una vez realizadas las correcciones que tienen en cuenta las diferencias debidas a las interacciones electromagnéticas (que son distintas para ambos núcleos

y que son correcciones pequeñas), resulta que la fuerza entre dos protones coincide con la fuerza entre dos neutrones y también con la fuerza entre un protón y un neutrón. A esta propiedad de la fuerza nuclear se la conoce como **independencia de carga**. Para explicarla, Heisenberg propuso la existencia de la simetría interna conocida como simetría de isospín nuclear.

En este contexto, el protón y el neutrón no son otra cosa que dos estados diferentes de una misma partícula, el nucleón. La diferencia entre estos dos estados radica en el valor que toma la tercera componente del vector  $\vec{I}$ . A diferencia del vector de espín,  $\vec{I}$  no es un vector en el espacio de coordenadas, sino en un espacio abstracto o interno. El nucleón se transforma, frente a rotaciones en este espacio de isospín, como vector de la representación fundamental de  $SU(2)$ , que corresponde a  $\vec{I}^2|N\rangle = i(i+1)|N\rangle$ , con  $i = 1/2$ . (Notar la analogía con el número cuántico  $s$ , que caracteriza a las representaciones irreducibles del álgebra de  $SU(2)$  para el espín). Por otra parte, se identifica al protón con el vector de esta representación caracterizado por proyección en dirección  $z$  igual a  $m_i = +\frac{1}{2}$ ,  $|p\rangle = |\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle$ , es decir,  $I_z|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle$  (estado de isospín up) y al neutrón, con el estado de isospín down ( $m_i = -\frac{1}{2}$ ),  $|n\rangle = |\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\rangle$ , que satisface  $I_z|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle$ . Si se elige representar la componente  $z$  del vector de isospín mediante la matriz de Pauli  $\sigma_3$ , se tendrá

$$I_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y un nucleón general podrá escribirse como combinación lineal de ambos, es decir,

$$N = \begin{pmatrix} \alpha(\vec{r}) \\ \beta(\vec{r}) \end{pmatrix}, \text{ con } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Los restantes hadrones pueden, en este mismo modelo, identificarse con multipletes de otras dimensiones del grupo  $SU(2)$ . Por ejemplo, los piones  $\pi^-, \pi^0, \pi^+$  constituyen el triplete de la representación  $i = 1$ , que es una representación de dimensión 3,

$$\pi^- = |1; -1\rangle, \quad \pi^0 = |1; 0\rangle, \quad \pi^+ = |1; 1\rangle,$$

y la partícula  $\Lambda = |0; 0\rangle$  es un singulete (se transforma con la representación trivial,  $i = 0$ ).

Por supuesto, esta simetría no es exacta. Sólo lo es si tenemos en cuenta exclusivamente la interacción nuclear. Si fuera exacta, las partículas en cada multiplete deberían tener exactamente la misma masa. Sabemos que este no es el caso. Por ejemplo, aunque el protón y el neutrón tienen masas muy próximas, las mismas no son exactamente iguales, debido a que esta invariancia de la fuerza nuclear se rompe explícitamente al tener en cuenta otras interacciones, en particular, la interacción electromagnética, que distingue entre ambos miembros del multiplete. En efecto, es un hecho fenomenológico que, en los hechos, se cumple la relación (conocida como fórmula de Gell-Mann, Nakano y Nishijima)

$$Q = I_z + \frac{B + S}{2},$$

donde  $Q$  es la carga eléctrica,  $S$  es la extrañeza (nula tanto para el protón como para el neutrón) y  $B$  (igual a 1 para ambos) es el número bariónico. De esta fórmula, igualmente válida en el modelo de quarks cuando sólo se consideran dos sabores ( $u$  y  $d$ ), se ve que cualquier término que represente interacción electromagnética y, por lo tanto, contenga la carga eléctrica en su expresión valdrá distinto para el protón y el neutrón, al distinguir entre distintos valores de  $I_z$ . La simetría de isospín estará, entonces, rota explícitamente por los términos de interacción electromagnética. Por supuesto, el orden de magnitud de tales términos será mucho menor que el correspondiente a los efectos nucleares.

Finalmente, señalemos que, al agregar otros tipos de quarks (charm, top y bottom) al modelo estándar esta fórmula se corrige, transformándose en

$$Q = I_z + \frac{B + S + C + B' + T}{2},$$

donde  $C$ ,  $B'$  y  $T$  son los nuevos números cuánticos que caracterizan a dichos quarks.

### IV.3. Reacciones nucleares. Aplicaciones y efectos nocivos de la Física Nuclear

Textos sugeridos: [14, 4]

El estudio de las propiedades de los núcleos atómicos ha contribuido de modo importante a la comprensión de las leyes fundamentales de la naturaleza. Como había ocurrido antes con el estudio de diversas ramas de la Física (aplicaciones del Electromagnetismo: uso comercial de la electricidad; aplicaciones de la Física Atómica: láser), también el estudio de la Física Nuclear ha dado como subproductos numerosas aplicaciones. Sin embargo, debido al uso destructivo que se ha realizado de algunas de ellas, y como consecuencia del problema del manejo de los residuos nucleares, las aplicaciones de la Física Nuclear conducen siempre a controversias. A continuación, estudiaremos algunas de esas aplicaciones y los principios subyacentes.

#### IV.3.1. Desintegraciones nucleares

Videos sugeridos:

<http://www.tu.tv/videos/radioactividad-1-2-henri-becquerei-m1>

<http://www.tu.tv/videos/radioactividad-2-2-henri-becquerei-m>

[http://www.youtube.com/watch?v=UhjJmvnl\\_eA&feature=related](http://www.youtube.com/watch?v=UhjJmvnl_eA&feature=related)

[http://www.youtube.com/watch?v=UhjJmvnl\\_eA&feature=related](http://www.youtube.com/watch?v=UhjJmvnl_eA&feature=related)

Además de la bibliografía recomendada al comienzo de esta sección, para este tema particular se aconseja [16].

Como ya hemos mencionado, son muchos los núcleos que resultan inestables y encuentran energéticamente favorable desintegrarse. Tales desintegraciones nucleares se

### IV.3 REACCIONES NUCLEARES. APLICACIONES Y EFECTOS NOCIVOS DE LA FÍSICA NUCLEAR

---

clasifican en tres tipos:  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . Estudiaremos cada uno de los tres tipos en breve. Pero, antes, señalemos un hecho experimental, primero observado por Gerhard Schmidt, y estudiado en forma cuantitativa por Rutherford: la actividad radiactiva decrece con el tiempo.

Cuantitativamente se tiene, para cualquiera de los tres tipos de desintegraciones, que el ritmo de desintegración nuclear es independiente de la cantidad de núcleos desintegrados antes y proporcional al número de núcleos presentes, es decir,

$$A = \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t),$$

donde  $\lambda$ , es una constante, que es distinta para distintos núcleos.  $A$  se conoce como la actividad y suele expresarse en la unidad conocida como Becquerel (1 Becquerel=1 desintegración/seg). La solución de esta ecuación diferencial está dada por

$$N(t) = N(t=0)e^{-\lambda t}. \quad (26)$$

Si llamamos  $T_{1/2}$  al tiempo necesario para que la muestra se reduzca a la mitad, tendremos  $1/2N(0) = N(0)\exp(-\lambda T_{1/2})$  o, tomando logaritmo  $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$ . A  $T_{1/2}$  se lo conoce como el tiempo de semidesintegración. Otro tiempo característico, que suele identificarse como aquel tiempo para el cual la muestra decayó, es la vida media  $\tau$ . Se trata de aquel lapso luego del cual el número de átomos en la muestra se reduce a  $\frac{N(0)}{e}$ . Por lo tanto,  $\tau = \frac{1}{\lambda}$  y, como  $\lambda$ , depende de la substancia que se desintegra.

En general, Los núcleos hijos decaen, a su vez, en núcleos nietos. Pero, mientras decaen, más núcleos hijos se van creando por desintegración de los padres. Lo mismo pasa con los núcleos nietos. Así, si la vida media del núcleo original es más larga que la edad de la Tierra, se alcanza una situación de equilibrio, en que pueden estar presentes núcleos descendientes, aunque los mismos tengan vida media muy corta comparada con la edad de la Tierra. Son las llamadas series radiactivas. Las mismas combinan desintegraciones de distintos tipos.

Justamente, sobre la base de la existencia o no de rastros de datos materiales radiactivos, se puede establecer la edad de, por ejemplo, restos de interés histórico. Este es el fundamento de la datación de restos orgánicos a partir de su contenido de  $^{14}\text{C}$ , aplicable a restos de hasta 60,000 años. Esta es una primera aplicación importante de los procesos nucleares.

En 1946, el químico estadounidense William Libby (1908-1980) dio a conocer los mecanismos de formación, a través de reacciones nucleares, de este isótopo de carbono, poco común en la Tierra. Más tarde (1949), desarrolló el método, que se llamó Método de Datación Radiocarbónica. este aporte le valió a Libby el Premio Nobel de Química en 1960.

En la naturaleza, hay isótopos estables de carbono:  $^{12}\text{C}$  y  $^{13}\text{C}$ , en abundancias relativas de 98,9 por ciento, 1,1 por ciento. También existe, en una proporción de  $10^{-10}$  por ciento, el isótopo inestable o radiactivo que nos ocupa,  $^{14}\text{C}$ . El mismo habría desaparecido hace tiempo, de no ser porque, en los constantes impactos de rayos cósmicos

### IV.3 REACCIONES NUCLEARES. APLICACIONES Y EFECTOS NOCIVOS DE LA FÍSICA NUCLEAR

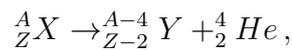
---

sobre la atmósfera, sigue formándose este isótopo, que se esparce uniformemente por la atmósfera.

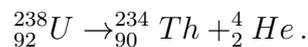
Durante el proceso de fotosíntesis, los vegetales vivos incorporan este isótopo, en proporción similar a la que existe en la atmósfera. Los animales también lo incorporan al ingerir vegetales. Por lo tanto, al analizar restos orgánicos, midiendo la proporción de  $^{14}\text{C}$  que albergan los fósiles, y comparando con la que tenían mientras estuvieron vivos (similar, aunque no exactamente igual a la cantidad que albergan los seres del mismo tipo actualmente vivos) mediante la fórmula (26), puede establecerse cuánto tiempo transcurrió desde la muerte (ver ejercicio propuesto al final de este capítulo).

#### Desintegración $\alpha$

Se llama desintegración  $\alpha$  a la emisión, por parte de un núcleo de número atómico grande, de una partícula (llamada partícula  $\alpha$ ) formada por dos protones y dos neutrones, ligados igual que en el núcleo de un átomo de Helio ( $^4_2\text{He}$ ). Este proceso ocurre, normalmente, en núcleos de gran número atómico ( $Z > 100$ ) y es un caso particular de fisión nuclear espontánea. En general, puede representarse el proceso por



donde hemos representado con  $X$  al núcleo original (núcleo padre) y con  $Y$  al núcleo que aparece en el estado final (núcleo hijo). Un ejemplo típico de emisión  $\alpha$  es:



Vemos que, en desintegraciones de este tipo, el número atómico disminuye en 2 de padre a hijo y la masa atómica, en 4.

Este tipo de desintegración sucede espontáneamente porque es energéticamente posible sin suministrar energía extra: la energía del núcleo padre es mayor que la del núcleo hijo sumada a la de la partícula  $\alpha$  ya que, en el núcleo, se produce una disminución en la energía coulombiana a causa de la pérdida de la carga  $+2e$ . Como veremos, la energía disponible en el proceso es llevada, como energía cinética, casi totalmente por la partícula  $\alpha$  emitida y, en menor proporción, por el núcleo hijo.

Veamos cómo es el balance de energía e impulso cuando un núcleo padre ( $X$ ), en reposo en el sistema de laboratorio, se desintegra en un núcleo hijo ( $Y$ ) y una partícula  $\alpha$ :

Dado que  $X$  está en reposo en el estado inicial, el sistema de laboratorio es, a la vez, el sistema de centro de masa. Por lo tanto, el vector cantidad de movimiento debe ser nulo, también, en el estado final. Se tiene, entonces,  $\vec{p}_Y = -\vec{p}_\alpha$ . Eso implica que los dos productos de la desintegración se mueven en sentidos opuestos y con  $|\vec{p}_\alpha| = |\vec{p}_Y|$ . En cuanto a la conservación de la energía, si el núcleo padre se desintegra en reposo, de ella resulta (llamando  $T$  a la energía cinética):

$$m_X c^2 = m_\alpha c^2 + T_\alpha + m_Y c^2 + T_Y.$$

IV.3 REACCIONES NUCLEARES. APLICACIONES Y EFECTOS  
NOCIVOS DE LA FÍSICA NUCLEAR

---

De aquí resulta que  $Q = T_\alpha + T_Y = B_\alpha + B_Y - B_X$ . Dado que  $B_X < B_Y + B_\alpha$ , la diferencia de energías cinéticas final menos inicial es

$$Q = T_\alpha + T_Y > 0.$$

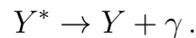
Se trata, entonces, de una reacción exoenergética. Además,  $T = \sqrt{(c\vec{p})^2 + m^2c^4} - mc^2$ , y es fácil verificar (derivando) que  $T$  es una función siempre decreciente de la masa. Teniendo en cuenta que  $|\vec{p}_\alpha| = |\vec{p}_H|$ , está claro que la partícula  $\alpha$  se lleva, como ya dijimos, prácticamente toda la energía cinética disponible.

La masa de una partícula  $\alpha$  es del orden de  $3,73 \text{ GeV}$ . Su energía cinética, de unos  $5 \text{ MeV}$ . De estos valores resulta  $\frac{v}{c} \sim 10^{-3}$ , de modo que podría admitirse un tratamiento no relativista del problema. Dada su velocidad relativamente baja (junto con su carga distinta de cero) estas partículas tienen alta probabilidad de interactuar electromagnéticamente con la materia y van perdiendo energía hasta ser absorbidas luego de haber recorrido algunos pocos centímetros en el aire.

Hasta aquí hemos supuesto que se emite una única partícula  $\alpha$ . En realidad, suelen emitirse más y sólo las más energéticas son emitidas como hemos calculado. Puede ocurrir que el núcleo padre se desintegre, primero, dando por resultado un núcleo hijo en estado excitado y una  $\alpha$  con menor energía y que, después, el núcleo hijo se desexcite emitiendo fotones (desintegración gamma).



seguida por

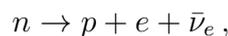


### Desintegración $\beta$

Ya hemos comentado sobre la desintegración  $\beta$  al explicar las razones por las cuales se postuló la existencia del antineutrino. Vimos que dicha desintegración es de la forma



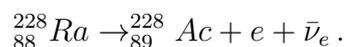
que hemos interpretado como la desintegración de un neutrón según



Esta desintegración puede ocurrir si

$$E = (m_{Z,A} - m_{Z+1,A} - m_e)c^2 > 0.$$

Un ejemplo de tal proceso es



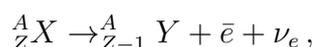
### IV.3 REACCIONES NUCLEARES. APLICACIONES Y EFECTOS NOCIVOS DE LA FÍSICA NUCLEAR

---

A esta desintegración se la conoce como desintegración  $\beta^-$ . En el campo del núcleo, siempre que

$$E = (m_{Z,A} - m_{Z-1,A} - m_e)c^2 > 0,$$

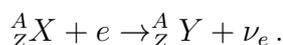
también puede ocurrir que un protón se desintegre (cosa que no es posible si el protón es libre), dando origen a la llamada desintegración  $\beta^+$ :



que se interpreta como

$$p \rightarrow n + \bar{e} + \nu_e.$$

Un proceso relacionado con los anteriores es el conocido como captura electrónica, en el cual el átomo captura un electrón atómico y emite un neutrino:



Finalmente, señalemos que, en algunos núcleos, se puede producir la llamada desintegración  $\beta$  doble, donde la carga cambia en dos unidades, en lugar de una.

En la naturaleza, las desintegraciones  $\alpha$  y  $\beta$  se combinan para dar origen a series radiactivas. Entre estas series, hay tres que ocurren naturalmente, ya que los núcleos padres tienen larga vida media (del orden de  $10^{10}$  años, lapso comparable con la vida de la Tierra):

- Padre con  $A = 4n$ :  ${}^{232}_{90}Th$  con  $\tau = 2,01 \times 10^{10}$  años
- Padre con  $A = 4n + 2$ :  ${}^{238}_{92}U$  con  $\tau = 6,52 \times 10^9$  años
- Padre con  $A = 4n + 3$ :  ${}^{235}_{92}U$  con  $\tau = 1,02 \times 10^9$  años

La serie cuyo padre, el  ${}^{237}_{90}Np$ , tiene  $A = 4n + 1$ , puede ser producida artificialmente, porque el núcleo padre tiene vida media muy corta  $\tau \sim 3,25 \times 10^6$  años.

Parte de la serie  $4n$  puede verse en la figura 31.

#### Desintegración $\gamma$

Cuando un núcleo emite radiación  $\alpha$  o  $\beta$ , el núcleo hijo puede quedar en un estado excitado. Puede entonces pasar a un estado de menor energía emitiendo un rayo  $\gamma$ , en la misma forma en que un electrón atómico se desexcita pasando a un nivel de energía más baja. En el caso del electrón, la radiación emitida corresponde a fotones con longitudes de onda en el visible o ultravioleta. En el caso de los núcleos, se trata de fotones mucho más energéticos (mayor frecuencia o, equivalentemente, menor longitud de onda).

Un ejemplo típico de emisión  $\gamma$  es el que tiene lugar luego de la desintegración  $\beta^-$  del Cobalto:



donde \* indica que el Níquel está en estado excitado. A continuación, este último decae a su estado fundamental, emitiendo dos rayos  $\gamma$ , de energías  $1,17 MeV$  y  $1,33 MeV$  respectivamente, como se ve en la figura 32.

IV.3 REACCIONES NUCLEARES. APLICACIONES Y EFECTOS NOCIVOS DE LA FÍSICA NUCLEAR

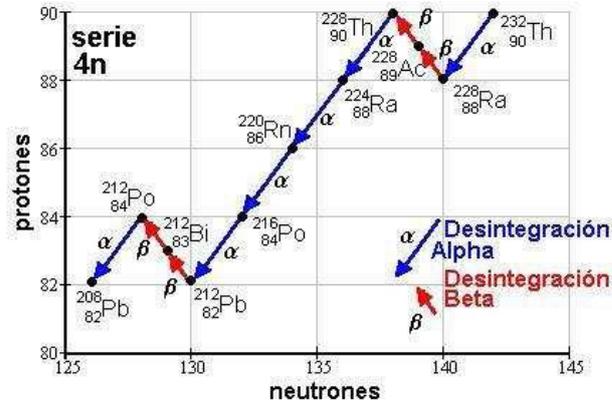


Figura 31: Series radiactivas

IV.3.2. Fisión nuclear

Links útiles:

- <http://www.youtube.com/watch?v=EQup4i4Uotw&list=QL&playnext=1> (atención: por error, al inicio del video se llama elementales a protones y neutrones)
- <http://www.youtube.com/watch?v=5-Unbrwqr4Q&feature=related>
- <http://www.youtube.com/watch?v=JyqvBxHbyNw&NR=1>
- [http://www.youtube.com/watch?v=M\\_30VHjPGc&NR=1&feature=fvwp](http://www.youtube.com/watch?v=M_30VHjPGc&NR=1&feature=fvwp)

Se conoce como fisión nuclear a un proceso en el cual un núcleo padre sufre una reacción que da origen a dos núcleos hijos, acompañados o no por otras partículas. Aparece representado esquemáticamente en la figura 33.

Tal fisión se llama espontánea si no es necesario entregar energía al núcleo padre para que se transforme. De lo contrario, se la denomina fisión inducida.

Con esta definición, el proceso de desintegración  $\alpha$ , que ya hemos tratado,  $^A_Z X \rightarrow ^{A-4}_{Z-2} Y + ^4_2 He$ , puede interpretarse como un proceso de fisión espontánea. En el transcurso de dicho proceso, algunos nucleones dentro del núcleo padre se aglutinan y les resulta energéticamente más favorable separarse del resto de los nucleones que mantenerse en un estado ligado dentro del núcleo original. La probabilidad de que ocurra tal aglutinamiento sólo es considerable para núcleos hijos con unos pocos nucleones y disminuye muy rápidamente con  $A$ . En la práctica, entre los núcleos con valores bajos de  $A$ , dicha probabilidad sólo es considerable para las llamadas partículas  $\alpha$ , es decir, núcleos de  $He$ , con  $A = 4$ . Contrariamente a lo que ocurre en el caso de dos o tres nucleones, el valor absoluto de la energía de ligadura por nucleón es extremadamente grande para los núcleos de  $He$  ( $\sim 28MeV$ ) (ver figura 28). Como consecuencia, el núcleo padre prefiere transformarse en un núcleo hijo con  $A - 4$  y  $Z - 2$  más una partícula  $\alpha$ , proceso que ya estudiamos.

Ahora bien, analizando la misma figura, se advierte que los núcleos con valores intermedios de  $A$  también tienen valor absoluto de la energía de ligadura grande en compara-

IV.3 REACCIONES NUCLEARES. APLICACIONES Y EFECTOS  
 NOCIVOS DE LA FÍSICA NUCLEAR

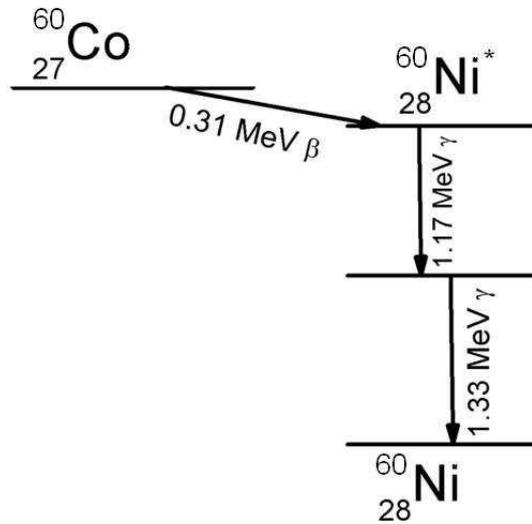


Figura 32: Ejemplo de desintegración  $\gamma$

ción con los núcleos muy pesados. Podría ocurrir que, de manera espontánea, los núcleos muy pesados se "partiesen al medio" de manera espontánea, dando origen a dos núcleos hijos con número másico aproximadamente igual a la mitad?

El proceso, de ocurrir, debería ser así: debido a la repulsión coulombiana, el núcleo padre se deformaría a un elipsoide prolado en lugar de conservar su forma esférica. En tal elipsoide, la repulsión de Coulomb contribuiría a aumentar la deformación. Finalmente, el núcleo padre terminaría por romperse en dos "mitades". Para que todo esto pudiera ocurrir, el valor absoluto de la energía de ligadura,  $B$ , del núcleo al adquirir forma elipsoidal debería ser mayor que en la esfera. Usaremos el modelo de la gota líquida, aproximado con sus tres primeros términos, para mostrar que no es el caso.

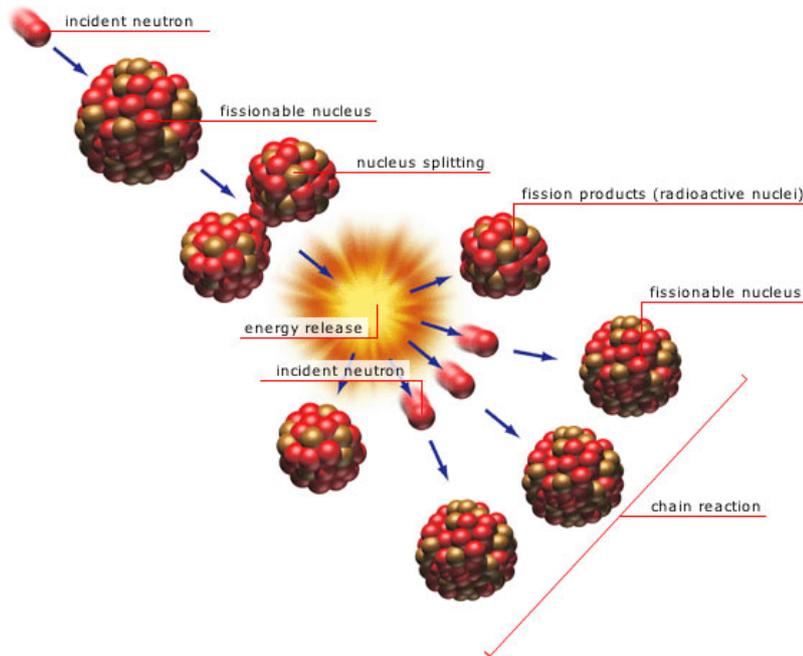
La ecuación que caracteriza al elipsoide es  $\frac{x^2+y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ . Para la esfera ( $R \sim A^{1/3}$ ) se tiene:

$$B_{esf} = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}. \quad (27)$$

En esta última expresión, el primer término es un término de volumen, el segundo representa una energía desestabilizante de superficie y el tercero es debido a la repulsión Coulombiana. Al deformar la esfera en un elipsoide, el volumen no cambia (suponemos que la gota es incompresible), así que la diferencia de energías entre ambas geometrías sólo es debida a los cambios en las energías de superficie y de Coulomb. Puede mostrarse que, para el elipsoide:

$$B_{elip} = a_1 A - a_2 A^{2/3} (1 + 2/5\epsilon^2) - a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} (1 - 1/5\epsilon^2), \quad (28)$$

IV.3 REACCIONES NUCLEARES. APLICACIONES Y EFECTOS  
NOCIVOS DE LA FÍSICA NUCLEAR



© 2004 QA International. All rights reserved.

Figura 33: Fisión nuclear

donde el parámetro  $\epsilon$  (excentricidad) está relacionado con los semiejes mayor ( $a$ ) y menor ( $b$ ) del elipsoide por las expresiones:

$$\begin{aligned} a &= R(1 + \epsilon) \\ b &= \frac{R}{(1+\epsilon)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (29)$$

y  $R$  es el radio de la esfera del mismo volumen ( $V = \frac{4}{3}a b$ ). Resumiendo, se tiene

$$\Delta B = B_{elip} - B_{esf} = -\frac{1}{5}\epsilon^2 A^{2/3} \left( 2a_2 - a_3 \frac{Z^2}{A} \right). \quad (30)$$

Toda vez que esta última expresión resulte ser positiva, el núcleo elegirá la forma elipsoidal. De lo contrario, preferirá la forma esférica. Usando para los coeficientes los valores fenomenológicos dados al estudiar el modelo de la gota, se encuentra que  $\Delta B$  es positiva sólo cuando  $Z^2 > 47A$ . Tal relación sólo se cumple para elementos que no existen en la naturaleza (transuránicos con  $A > 270$  y  $Z > 114$ ).

Los núcleos que ocurren en forma natural corresponden a  $\Delta B$  negativo y no se fisionan espontáneamente (salvo en los casos de desintegración  $\alpha$ ). Para lograrlo, hay que proporcionarles energía. Cómo hacerlo? Ya en los inicios de la Física Nuclear, los científicos intentaban producir elementos transuránicos usando la captura de neutrones ( $n$ ) por núcleos para aumentar el número másico. Pero, en dichos experimentos se observaba, en realidad, que los neutrones térmicos (así llamados por tener una energía del orden de

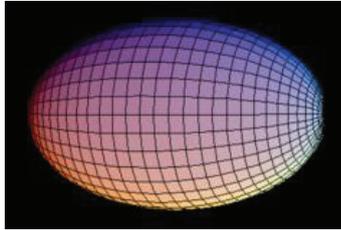
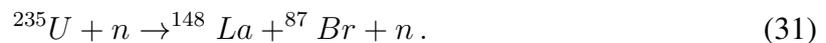


Figura 34: Elipsoide prolado

$\frac{1}{40} eV$ , correspondiente a la temperatura de  $300 K$ ), al ser dispersados por núcleos con  $A$  impar (como el  $^{235}U$ ) no producían núcleos más pesados, sino que el núcleo padre se fisionaba en dos núcleos de masa intermedia, además de otras partículas en el estado final. A este proceso se lo conoce como fisión inducida. Un ejemplo típico es la reacción:



También se observó que, en cambio, la dispersión de neutrones térmicos por núcleos con  $A$  par no produce fisión; en este caso, la fisión requiere energías mucho más altas (del orden de  $2 MeV$ ).

La fisión nuclear resulta de utilidad ya que, al producirse, se libera gran cantidad de energía. Una estimación del orden de magnitud de la energía liberada puede obtenerse usando los valores mostrados en la figura 28. Allí se ve que el valor absoluto de la energía de ligadura por nucleón es mucho menor para  $A$  muy grande que para  $A$  medio, con una diferencia entre ambas  $\Delta(B/A) \sim 0,9 MeV$ . por lo tanto, la diferencia de energías de ligadura entre el estado final y el inicial es de  $\Delta E_{ligadura} = -0,9 MeV \times A = -200 MeV$ . (Hemos usado aquí que  $A = 235$  para  $^{235}U$ . Recordar que la energía de ligadura por nucleón es  $-\frac{B}{A}$ ). Por lo tanto, en cada proceso de fisión se libera una gran cantidad de energía.

Analicemos el proceso de fisión con más detalle (ver figura ??). Durante la fisión nuclear, los neutrones, al ser capturados, forman un núcleo con número másico  $A + 1$ , en un estado excitado. Al desexcitarse, este último átomo puede elegir uno de dos caminos: decaer por emisión  $\gamma$ , conservando su número másico y demás características o, si es más favorable, fisionarse en dos núcleos hijos. Veamos ahora, entonces, bajo qué circunstancias resulta más favorable la fisión. Dicho de otro modo: cuándo es el valor absoluto de la energía de ligadura mayor para dos núcleos hijos que para un único núcleo esférico?

IV.3 REACCIONES NUCLEARES. APLICACIONES Y EFECTOS  
NOCIVOS DE LA FÍSICA NUCLEAR

---

Volviendo al modelo de la gota tenemos, para un núcleo par-par:

$$\begin{aligned} \Delta B = 2B\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) - B(A, Z) = & -2a_2\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 2a_3\left(\frac{A}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{Z}{2}\right)^2 \\ & + a_2(A)^{\frac{2}{3}} + a_3(A)^{-\frac{1}{3}}Z^2 \sim (A)^{\frac{2}{3}}\left(-0,27a_2 + 0,38a_3\frac{Z^2}{A}\right). \end{aligned} \quad (32)$$

La última expresión resulta positiva para  $Z^2 > 17A$ . Por lo tanto, los núcleos que satisfacen  $17A < Z^2 < 47A$  pueden, si se les proporciona, mediante neutrones incidentes, cierta energía de activación que les permita superar una barrera de potencial (la segunda desigualdad indica que no se trata de un proceso espontáneo), partirse en dos núcleos más o menos iguales, conocidos como núcleos hijos y, en el proceso, se liberará energía.

La figura 35 muestra tal barrera de potencial como función de la deformación del núcleo. Para  $Z \sim 92$ , dicha barrera es de sólo algunos  $MeV$ . Este es el caso para los isótopos (igual  $Z$ , pero distinto  $N$  o  $A$ ) del uranio (también para  $^{233}Th$  y  $^{239}Pu$ ), que tienen una considerable probabilidad de fisión. De los isótopos de uranio, los más fácilmente fisionables corresponden al  $^{235}U$  ( $Z = 92$ ,  $N = 143$ ), que se fisionan al incidir sobre ellos neutrones térmicos. Para fisionar  $^{238}U$  ( $Z = 92$ ,  $N = 146$ ), en cambio, hacen falta neutrones más energéticos. En efecto, dado que los núcleos par-par son los más estables, el  $^{235}U$  prefiere absorber neutrones para formar  $^{236}U$ , que es par-par y luego fisionarse. El  $^{238}U$ , en cambio, sólo puede absorber neutrones muy energéticos, porque el  $^{239}U$  es par-impar y, entonces, energéticamente desfavorable. Pero, en la naturaleza, los más abundantes son los últimos, como discutiremos en breve. Por eso se realiza el proceso de enriquecimiento de uranio.

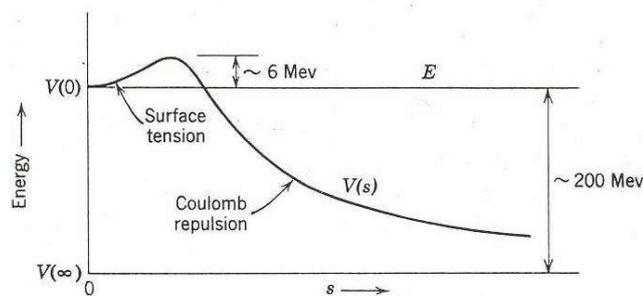


Figura 35: Barrera de potencial en la fisión

Como hemos dicho, ambos productos en un proceso de fisión tienen números másicos aproximadamente iguales. Sin embargo, la naturaleza prefiere fisiones no del todo simétricas. Típicamente se tiene, para los núcleos hijos,  $A_1 \sim 95$  y  $A_2 \sim 140$ . Este hecho no ha encontrado explicación hasta el presente.

Una vez producida la fisión, los núcleos hijos quedan en un estado excitado y decaen emitiendo nuevos neutrones (evaporación de neutrones). Esos neutrones, aproximadamente 2,5 de ellos por fisión) pueden, a su vez, iniciar nuevas fisiones si se los modera

### IV.3 REACCIONES NUCLEARES. APLICACIONES Y EFECTOS NOCIVOS DE LA FÍSICA NUCLEAR

hasta energías térmicas, dando origen a las llamadas cadenas de fisión. Para caracterizar la persistencia de tal cadena de fisiones se define el coeficiente  $k$ , dado por  $k = \text{Nro. de neutrones en la } n + 1\text{-ésima fisión} / \text{Nro. de neutrones en la } n\text{-ésima fisión}$ . Si  $k < 1$  la fisión se llama subcrítica y, finalmente, se detiene. Si, en cambio,  $k > 1$ , se descontrola y conduce a una explosión.

Justamente, en los reactores nucleares ver figura 36, la reacción en cadena es controlada: después de una etapa inicial con  $k > 1$ , destinada a alcanzar la energía requerida, se mantiene  $k = 1$ . Este control se consigue introduciendo o quitando del reactor las llamadas barras de control, hechas de Cd.

Como combustible para los reactores puede usarse uranio natural. Pero el mismo es mezcla de  $^{235}\text{U}$  y  $^{238}\text{U}$  en proporción 1 : 138, porque la vida media del  $^{235}\text{U}$  es mucho más corta ( $7 \times 10^8$  años) que la del  $^{238}\text{U}$  ( $5 \times 10^9$  años). Si se usara uranio natural, entonces, la mayor parte de los neutrones térmicos sería absorbida por el  $^{238}\text{U}$ , y no se produciría fisión. Por eso se usa uranio enriquecido, con mayor proporción de  $^{235}\text{U}$ .

Las piezas mencionadas hasta aquí constituyen el núcleo del reactor. El mismo está rodeado por plomo y cemento, para impedir la salida de radiación y por un moderador, que detiene a los neutrones excesivamente rápidos, para que puedan inducir nuevas fisiones. En general, se usa como moderador agua pesada ( $D_2O$ ). Además, todo el mecanismo está rodeado por agua, que absorbe la energía producida en el núcleo (en forma de calor). El vapor resultante se utiliza para generar electricidad al mover turbinas y vuelve a condensarse para ser reutilizado como agua. Notar que esta etapa de enfriamiento se realiza con fuentes de agua cercanas que, como consecuencia, aumentan su temperatura, con el consiguiente efecto sobre el medio ambiente, que debe controlarse.

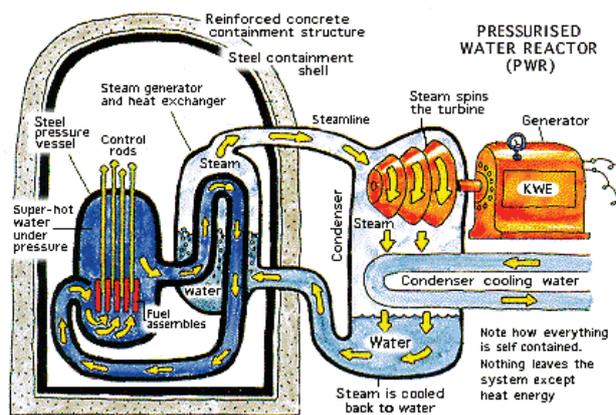


Figura 36: Reactor nuclear

Calculemos la energía generada por un gramo de uranio que se fisiona. Como ya vimos, cada núcleo de  $^{235}\text{U}$  origina, aproximadamente,  $200\text{MeV} \sim 3,2 \times 10^{-11}$  Joules. Cada gramo de material contiene  $\frac{A_0}{A}$  núcleos, donde  $A_0$  es el número de Avogadro. En el

### IV.3 REACCIONES NUCLEARES. APLICACIONES Y EFECTOS NOCIVOS DE LA FÍSICA NUCLEAR

---

caso particular del  $^{235}\text{U}$ , cada gramo contiene, entonces  $\frac{6 \times 10^{23}}{235} \sim 3 \times 10^{21}$  núcleos. Por lo tanto, un gramo de  $^{235}\text{U}$  produce una energía de  $3 \times 10^{21} \times 3,2 \times 10^{-11} \sim 10^{11}$  Joules, que equivale a  $1\text{MW}$  por día, del orden de  $10^6$  veces la energía producida por un gramo de carbón. La generación de energía mediante fisión es, sin duda, la más importante de las aplicaciones de los procesos nucleares.

#### IV.3.3. Fusión nuclear

Links útiles:

[http://www.youtube.com/watch?v=M\\_30VHjPGc&NR=1&feature=fvwp](http://www.youtube.com/watch?v=M_30VHjPGc&NR=1&feature=fvwp)

Volvamos a la figura 28. Allí se ve que los núcleos con número másico intermedio son los más ligados. Para números másicos menores,  $B/A$  disminuye muy rápidamente. Entonces, podemos imaginar procesos, llamados de fusión, opuestos a los procesos de fisión: poniendo en contacto dos núcleos livianos puede obtenerse un núcleo intermedio, más ligado. La diferencia de energías de ligadura por unidad de nucleón liberada resulta comparable con la generada en la fisión. Sin embargo, dado que los núcleos más livianos contienen menos nucleones, la energía total generada por fusión resulta ser menor que la obtenida por fisión. La ventaja de la fusión radica en que los núcleos livianos e intermedios son mucho más abundantes en la naturaleza y hay, por lo tanto, más materia prima disponible. En efecto, este es el mecanismo responsable de la generación de energía en el interior del Sol y en el de otras estrellas.

Sin embargo, conseguir que dos núcleos se aproximen lo suficiente para fundirse en uno solo requiere sobrepasar la barrera coulombiana en la figura 35. Cuando los núcleos se tocan, la barrera alcanza un máximo, dado por:

$$V_{\text{Coul.}} = \frac{Z Z' e^2}{R + R'} = \frac{Z Z' e^2}{1,2 \text{ fm} (A^{1/3} + A'^{1/3})} \sim \frac{197 \text{ MeV}}{137 \times 1,2} \frac{Z Z' e^2}{(A^{1/3} + A'^{1/3})}.$$

Para núcleos con igual número de protones y neutrones  $A \sim A' \Rightarrow 2Z \sim 2Z'$ . Calculando para  $A \sim 8$  se obtiene  $V_{\text{Coul.}} \sim 4\text{MeV}$ . Esa es la energía cinética que debemos dar a los núcleos originales (acelerándolos o calentándolos). Pero, si los aceleramos, en los procesos de colisión predomina la dispersión elástica. Por lo tanto, debe calentárselos hasta temperaturas del orden de  $10^{10}\text{K}$ , una temperatura comparable con la del interior del Sol.

Hay, a nivel mundial, numerosos intentos de lograr procesos controlados de fusión. Obviamente, será energía mucho más limpia, al no generar residuos radiactivos y no expuesta a accidentes, ya que no involucra reacciones en cadena. Pero el principal problema es que resulta difícil mantener confinados a los núcleos tan calientes por lapsos suficientemente largos para que la fusión se produzca. Con diversas técnicas (confinamiento magnético, confinamiento inercial, inyección láser de energía electromagnética) se han

#### IV.4 EFECTOS DE LA RADIACIÓN NUCLEAR

obtenido algunas reacciones en laboratorio, típicamente:



Un esquema del primero de estos procesos se reproduce en la figura 37.

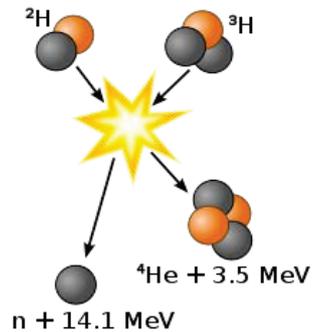


Figura 37: Fusión nuclear

#### IV.4. Efectos de la radiación nuclear

Permanentemente estamos sometidos a radiaciones de diversos tipos, provenientes de numerosas fuentes. Las hay de dos tipos distintos:

**Radiaciones no ionizantes:** son aquellas que no poseen suficiente energía para arrancar electrones de los átomos, es decir, no son capaces de producir ionizaciones.

**Radiaciones ionizantes:** corresponden a las radiaciones de mayor energía (menor longitud de onda). Tienen energía suficiente como para arrancar electrones de los átomos con los que interactúan, es decir, para producir ionizaciones.

Las radiaciones no ionizantes son de origen electromagnético. Recordemos que, en este caso,  $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ , donde  $E$  es la energía,  $c$  es la velocidad de la luz,  $\nu$  es la frecuencia de la onda electromagnética y  $\lambda$  su longitud de onda. A este grupo pertenecen las radiaciones consistentes en ondas de radiofrecuencia, utilizadas por las emisoras de radio y las microondas utilizadas en electrodomésticos y en el área de las telecomunicaciones, los rayos infrarrojos, la luz visible y la radiación ultravioleta, en orden creciente de energía (entre  $10^{-24}$  y  $10^{-18}$  Joules. Entre estas, las más energéticas pueden producir quemaduras.

Entre las radiaciones ionizantes se encuentran los rayos X ( $10^{-16}\text{J}$ ) y las radiaciones nucleares ( $10^{-12}\text{J} \sim 10\text{eV}$ ). Pueden estar constituidas por fotones (rayos X y nucleares gamma) o por partículas con masa (alfa, beta, neutrones y otras).

Las radiaciones de este tipo tienen aplicaciones muy importantes en ciencia, industria y medicina. En la industria, pueden ser tiles para la producción de energía, para la esterilización de alimentos, para conocer la composición interna de diversos materiales. En el campo

de la medicina, también cuentan con numerosas aplicaciones beneficiosas para el ser humano. Con ellas se pueden realizar una gran variedad de estudios diagnósticos (medicina nuclear y radiología) y tratamientos (medicina nuclear y radioterapia).

Los seres vivos estamos expuestos a niveles bajos de radiación ionizante procedente del sol, las rocas, el suelo, residuos radiactivos de pruebas nucleares en el pasado, de ciertos productos de consumo y de materiales radiactivos liberados desde hospitales y desde plantas asociadas a la energía nuclear y a las de carbón. Aunque no está claro si dosis bajas pueden resultar perjudiciales, los organismos dedicados a la protección radiológica oficialmente utilizan la hipótesis conservadora de que hasta en dosis moderadas e, incluso, muy bajas las radiaciones ionizantes aumentan la probabilidad de contraer cáncer, al producir reacciones químicas que pueden afectar al ADN, y que esta probabilidad aumenta con la dosis recibida. A los efectos producidos a dosis bajas se les suele llamar efectos probabilísticos, estadísticos o estocásticos. La exposición a altas dosis de radiación ionizante puede causar quemaduras de la piel, caída del cabello, náuseas, enfermedades y la muerte. Los efectos dependen de la cantidad de radiación ionizante recibida, de la duración de la irradiación, y de factores personales tales como el sexo, edad del individuo expuesto, y del estado de salud y nutrición.

El manejo de los residuos generados en las distintas etapas (fabricación, uso y desmonte de centrales) por el combustible nuclear son, por esta razón, un grave problema a resolver. El riesgo de accidentes nucleares, con la consiguiente liberación de residuos es otro de los aspectos negativos de la energía nuclear.

## IV.5. Ejercicios sugeridos

1. Demuestre que la fórmula empírica de Bethe-Weizsäcker para la energía de núcleos con dado valor de  $A$  impar ( $a_5 = 0$ ) alcanza un mínimo para un valor de  $Z$  tal que  $Z < N$ .
2. Resuelva, en coordenadas cartesianas, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un oscilador armónico isótropo tridimensional ( $U(r) = \frac{1}{2}M\omega^2r^2$ ). Calcule las degeneraciones de los tres primeros niveles de energía.
3. Cuánto tiempo se requiere para que  $5 \text{ mg}$  de  $^{22}\text{Na}$ , cuyo tiempo de semidesintegración es  $T_{\frac{1}{2}} = 2,6$  años, se reduzcan a  $1 \text{ mg}$ ?
4. Estudie el choque elástico no relativista en el cual una partícula de masa  $m_1$  incide, con velocidad  $v_1$ , sobre otra partícula, en reposo, de masa  $m_2$ . Calcule la energía cinética final de la partícula 1 y demuestre que la misma es mínima cuando las masas son iguales. Este resultado da una idea de por qué se usa agua pesada para frenar los neutrones rápidos luego de un proceso de fisión nuclear.

## *IV.5 EJERCICIOS SUGERIDOS*

---

## **Parte V**

# **Introducción a las Teorías de Campos para las Interacciones Fundamentales**



---

Principales referencias: [21, 22]

Lectura extra sugerida: [18, 19]

Videos útiles: El Universo Elegante, BBC

Está claro que una buena teoría de las interacciones fundamentales entre partículas elementales, debido a las distancias y energías típicas en juego, debe ser una teoría, a un tiempo, cuántica y relativista. Sin embargo, la tarea de conciliar ambos requerimientos no resultó, en absoluto, trivial. De resultados de ese esfuerzo, se abandonó, en física de las interacciones fundamentales, la idea de mecánica cuántica como teoría de una partícula, donde la función de onda describe la amplitud de probabilidad de encontrar a una partícula individual en un cierto estado. En lugar de eso, las teorías que integran el modelo estándar de las interacciones fundamentales son teorías cuánticas de campos, en las cuales los campos de la teoría actúan como operadores que crean y destruyen partículas a partir de un estado de vacío. Dicho estado de vacío es un vector de un espacio de Hilbert (espacio vectorial de dimensión infinita, con propiedades que permiten, entre otras cosas, definir bases ortonormales). Tales teorías cuánticas de campos han mostrado ser útiles para describir las interacciones electrodébiles y fuertes y están basadas en la invariancia de los fenómenos físicos ante dos tipos de simetrías: simetrías espacio-temporales, particularmente frente a transformaciones del grupo de Lorentz inhomogéneo o de Poincarè y simetrías internas de gauge o locales, transformaciones en las cuales los puntos del espacio-tiempo permanecen inalterados, pero cambia la forma de los campos de manera diferente en cada punto.

A continuación, empezaremos por esbozar los primeros intentos de conciliar relatividad especial y mecánica cuántica de una partícula, señalando los problemas de interpretación que surgen en tal intento. Luego, estudiaremos las propiedades de las acciones clásicas correspondientes a campos libres con distintos valores de espín y daremos una noción del procedimiento de cuantización en el caso de un campo escalar libre. Finalmente, estudiaremos teorías de campos en interacción, empezando por la Electrodinámica Cuántica y sus correspondientes reglas de Feynman. Discutiremos brevemente el efecto de considerar grupos de gauge no abelianos, particularizando a la Cromodinámica Cuántica (grupo de gauge  $SU(3)$ ), que describe la interacción fuerte entre quarks. Finalmente, realizaremos una breve presentación de la teoría de Glashow, Salam y Weinberg para las interacciones electrodébiles, la ruptura espontánea de simetría y el mecanismo de Higgs para dar masa a las partículas del modelo estándar.

A menos que se indique lo contrario, en las secciones siguientes se utilizarán unidades naturales ( $\hbar = c = 1$ ). Recuérdese que, obtenido un resultado cualquiera, puede recuperarse su verdadero valor numérico multiplicando por las potencias adecuadas de  $\hbar$  y de  $c$ . Adoptaremos para el espacio-tiempo de Minkowski la métrica  $g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

Una breve introducción a la noción de tensor, utilizada a menudo en este capítulo de los apuntes, se presenta en ??.

## V.1. Intentos de construir una Mecánica Cuántica Relativista. Problemas de interpretación

### V.1.1. Partícula sin espín. Ecuación de Klein-Gordon

Recordemos que, en Mecánica Cuántica no relativista, identificamos coordenadas, impulsos y energías con operadores (en el primer caso, simplemente multiplicativos; en los otros dos, diferenciales) que actúan sobre la función de onda  $\Phi(t, x)$ :

$$\begin{aligned}\vec{x} &\rightarrow \vec{x} \\ \vec{p} &\rightarrow -i\vec{\nabla} \\ E &\rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}.\end{aligned}\tag{34}$$

El símbolo  $\vec{\nabla}$  en la segunda de las ecuaciones precedentes representa el operador gradiente que, en coordenadas cartesianas, es dado por  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$ . Reemplazando las cantidades clásicas por estos operadores en la expresión de la energía, obtenemos la ecuación de Schrödinger:

$$i\partial_t\Phi(t, x) = \hat{H}\Phi(t, x).$$

La función  $\Phi(t, x)$  es llamada la función de onda y caracteriza el estado de *una partícula*, que es el objeto de nuestro estudio. Se interpreta, entonces,  $|\Phi(t, x)|^2$  como una densidad de probabilidad que es, obviamente, positiva.

En el caso de sistemas conservativos, podemos ir más lejos, separando la variable temporal en la ecuación mediante  $\Phi(t, x) = e^{-iEt}\phi_E(\vec{x})$  y pasar a la llamada ecuación de Schrödinger estacionaria:

$$E\phi_E(\vec{x}) = \hat{H}\phi_E(\vec{x}),$$

donde  $E$  es un autovalor del operador  $\hat{H}$  y, dado que  $\hat{H}$  es un operador autoadjunto, la función de onda de una partícula puede desarrollarse en una base ortonormal de autofunciones de  $\hat{H}$ .

Por ejemplo, en el estudio de una partícula libre clásica no relativista se tiene  $E = \frac{p^2}{2m}$ , donde  $\vec{p}$  es el vector cantidad de movimiento,  $m$  es la masa y  $E$  es la energía de la partícula. Al elevar coordenadas e impulsos al rango de operadores, la ecuación de Schrödinger estacionaria resulta, en este caso,

$$E\phi_E(\vec{x}) = \hat{H}\phi_E(\vec{x}) = -\frac{\Delta\phi_E(\vec{x})}{2m},$$

donde  $\Delta$  es el operador laplaciano que, en coordenadas cartesianas, está dado por  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

Los valores admisibles de la energía (notar que son siempre positivos o nulos, nunca negativos) son los autovalores del operador  $\hat{H}$ . Las correspondientes autofunciones permiten calcular la probabilidad de encontrar a la partícula con ese valor de energía. En este caso (partícula libre), existe un continuo de autovalores admisibles, acotados por debajo. La función de onda puede escribirse como

V.1 INTENTOS DE CONSTRUIR UNA MECÁNICA CUÁNTICA  
RELATIVISTA. PROBLEMAS DE INTERPRETACIÓN

---

$$\Phi(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k \tilde{\Phi}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - Et)},$$

con  $E = \frac{k^2}{2m}$ .

De aquí resulta, para la probabilidad total:

$$\int d^3 x |\Phi(t, x)|^2 = \int d^3 k |\Phi(\vec{k})|^2,$$

que es positiva e independiente del tiempo (conservada).

Oskar Klein (1894-1977) y Walter Gordon (1893-1939) hicieron el primer intento de extender estas nociones al dominio relativista. Ahora bien, en el caso de una partícula libre relativista de masa  $m$ , la ecuación clásica que vincula energía y componentes del impulso es

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2. \quad (35)$$

Aparece, así, el primer problema en la interpretación de una eventual Mecánica Cuántica Relativista: por cada energía positiva, la ecuación anterior predice la existencia de otra energía de igual módulo, pero signo contrario. En efecto, despejando los posibles valores de energía compatibles con la ecuación (35) se tiene:

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

La mínima energía positiva ( $m$ , en unidades naturales) y la máxima energía negativa ( $-m$  en las mismas unidades) están separadas por el llamado "gap de energía", cuyo valor es  $2m$ . A diferencia de lo que ocurría en el caso no relativista, las energías negativas no tienen cota inferior. Por lo tanto, dada una partícula en un estado de energía  $E = m$ , bastaría quitarle una energía igual a  $2m$ , llevándola al estado de energía  $E = -m$ . Una vez en ese estado, la partícula elegiría decaer sin límite, ocupando estados de energías cada vez menores, emitiendo infinita energía en el proceso. Como veremos, este es un obstáculo irresoluble en la construcción de una mecánica cuántica relativista para una partícula única. Ya hemos visto que la existencia de energías negativas condujo a la introducción del concepto de antipartícula.

Olvidemos por un momento la dificultad antes discutida y continuemos en nuestro intento de extender al campo de la relatividad especial las nociones de la Mecánica Cuántica no relativista. Tomando, para una partícula libre, la función compleja  $\varphi(t, \vec{x})$ , la correspondencia  $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$  conduce, usando la ecuación (35), a:

$$(\partial_t^2 - \Delta + m^2)\varphi(t, \vec{x}) = 0.$$

Usando el tetravector covariante  $\partial$  de componentes  $\partial_\mu : (\partial_0, \vec{\nabla})$ , la ecuación anterior puede escribirse en la forma

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\varphi = 0$$

V.1 INTENTOS DE CONSTRUIR UNA MECÁNICA CUÁNTICA  
RELATIVISTA. PROBLEMAS DE INTERPRETACIÓN

---

Esta ecuación, conocida como la ecuación de Klein-Gordon, tiene una diferencia fundamental con la ecuación de Schrödinger no relativista: presenta una derivada de segundo orden con respecto al tiempo (la covarianza relativista exige que la ecuación tenga el mismo orden en derivadas temporales y espaciales). Como consecuencia, para determinar su solución a un tiempo arbitrario, es necesario dar dos datos iniciales. Dicho de otro modo: no basta con conocer  $\varphi(t = 0, \vec{x})$ . Debe conocerse también el valor de  $\partial_t \varphi(t, \vec{x})$  en  $t = 0$ . Ambos datos iniciales determinan las dos constantes en la solución general. Como consecuencia, la “probabilidad total”,  $\int d^3 x |\varphi(t, \vec{x})|^2$ , definida a partir de la función de onda no resulta independiente del tiempo.

En efecto,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3 x |\varphi(t, \vec{x})|^2 = \int d^3 x [\dot{\varphi}^*(t, \vec{x})\varphi(t, \vec{x}) + \dot{\varphi}(t, \vec{x})\varphi^*(t, \vec{x})]$$

Nos preguntamos: ¿es posible definir una cantidad real, independiente del tiempo (conservada durante la evolución del sistema) y definida no negativa, que pueda identificarse con la probabilidad, como ocurre en Mecánica Cuántica no relativista?

Como mostraremos a continuación, es posible definir una cantidad real e independiente del tiempo (que llamaremos la carga, por razones que se aclararán al estudiar Teoría de Campos). Pero también veremos, con un contraejemplo, que tal cantidad no siempre es no negativa, como corresponde a una legítima probabilidad. Tal cantidad está dada por:

$$J^0 = \int d^3 x \frac{i}{2m} (\varphi^* \dot{\varphi} - \dot{\varphi}^* \varphi) . \quad (36)$$

Es evidente que se trata de una cantidad real. Que es conservada, puede verse a partir de la ecuación de movimiento, como sigue:

$$(\partial_t^2 - \Delta + m^2)\varphi(t, \vec{x}) = 0 . \quad (37)$$

Conjugando la ecuación anterior:

$$(\partial_t^2 - \Delta + m^2)\varphi^*(t, \vec{x}) = 0 . \quad (38)$$

Multiplicando (37) por  $\varphi^*$ , (38) por  $\varphi$  y restando, se tiene:

$$\varphi^*(\partial_t^2 - \Delta + m^2)\varphi - \varphi(\partial_t^2 - \Delta + m^2)\varphi^* = 0 ,$$

que puede integrarse sobre el espacio-tiempo, para obtener:

$$\int dt d^3 x \left[ \varphi^*(\partial_t \partial_t - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\varphi - \varphi(\partial_t \partial_t - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\varphi^* \right] = 0$$

o bien, integrando por partes:

$$\int dt \int d^3 x \left\{ \left[ \partial_t (\varphi^* \partial_t \varphi) - \vec{\nabla} \cdot (\varphi^* \vec{\nabla} \varphi) \right] - \left[ \partial_t (\varphi \partial_t \varphi^*) - \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \varphi^*) \right] \right\} = 0 . \quad (39)$$

## V.1 INTENTOS DE CONSTRUIR UNA MECÁNICA CUÁNTICA RELATIVISTA. PROBLEMAS DE INTERPRETACIÓN

---

De la última ecuación se ve que, si definimos  $j^0 = \frac{i}{2m} (\varphi^* \dot{\varphi} - \varphi \dot{\varphi}^*)$  y  $\vec{j} = \frac{-i}{2m} (\varphi^* \vec{\nabla} \varphi - \varphi \vec{\nabla} \varphi^*)$ , tendremos

$$\partial_t j^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (40)$$

La ecuación (40) es una ecuación de continuidad como la que satisfacen, por ejemplo, la densidad de carga y la densidad de corriente en electromagnetismo. Nótese que dicha ecuación puede escribirse, en forma manifiestamente covariante de Lorentz, como  $\partial_\mu j^\mu = 0$ . Definiendo la carga como  $J^0 = \int d^3x j^0$  e integrando (40) sobre todo el espacio y entre dos tiempos arbitrarios,  $T_1$  y  $T_2$ , tendremos:

$$\int_{T_1}^{T_2} dt \partial_t J^0 = - \int_{T_1}^{T_2} dt d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j}.$$

El teorema de Gauss nos permite reemplazar la integral de la divergencia sobre el volumen espacial (infinito) por una integral, sobre el borde, de la derivada normal de la densidad de corriente. Si se consideran campos que se anulan suficientemente rápido en el infinito el miembro derecho de la última ecuación se anula y, realizando explícitamente la integral del miembro izquierdo, resulta:

$$J^0(T_2) = J^0(T_1),$$

con lo cual queda demostrado que la carga, tal como la definimos en (36), es una cantidad conservada. Sin embargo, no es siempre no negativa. Basta un contraejemplo para ver que no lo es.

En efecto, para una partícula libre, la solución de la ecuación de Klein-Gordon para un dado impulso  $\vec{k}$  puede escribirse como  $\varphi(t, \vec{x}) = N e^{-iEt + i\vec{k} \cdot \vec{x}}$ , donde  $N$  es un factor complejo de normalización (verifique que, reemplazada en la ecuación, la satisface, con  $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ ). En este caso, es muy simple calcular explícitamente el valor de la densidad de carga, que resulta  $j^0 = E|N|^2$ , independiente del tiempo. Es, obviamente, positiva, cuando  $E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$  (soluciones de energía positiva), pero resulta negativa para las soluciones de energía negativa, es decir,  $E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ . Ciertamente, no puede interpretarse a la densidad de carga como una densidad de probabilidad. Como consecuencia, no puede entenderse la ecuación de Klein-Gordon como la ecuación que satisface UNA partícula cuántica relativista. ¿Puede dársele otra interpretación? Como veremos, la respuesta se encuentra en la Teoría Cuántica de Campos, donde la ecuación de Klein-Gordon será la ecuación clásica satisfecha por un campo escalar (de espín nulo). Pero, en este contexto, el campo se elevará, a posteriori, a la jerarquía de un operador, que crea y destruye partículas a partir de un estado de vacío, como veremos más adelante.

### V.1.2. La ecuación de Dirac

Visto que la ecuación de Klein-Gordon resultaba insatisfactoria desde el punto de vista de la Mecánica Cuántica Relativista de una partícula, Paul Dirac (1902-1984) se

V.1 INTENTOS DE CONSTRUIR UNA MECÁNICA CUÁNTICA  
RELATIVISTA. PROBLEMAS DE INTERPRETACIÓN

---

preguntó si era posible construir una ecuación relativista para un objeto de cuatro componentes, que sólo contuviera derivadas temporales de primer orden, como ocurre en la ecuación de Schrödinger no relativista, sin perder la covariancia de Lorentz. Este último requisito conduce, como veremos, a una ecuación que es también diferencial de primer orden en las coordenadas espaciales. Como veremos también, tal ecuación admite una densidad de carga no negativa, pero no resuelve el problema de interpretación de las energías negativas. Sin embargo, como en el caso de Klein-Gordon, la ecuación encuentra una interpretación en teoría de campos: se trata de una ecuación que describe, a nivel clásico en Teoría Cuántica de Campos, partículas de espín 1/2, y resulta ser la adecuada para tratar casi todas las partículas materiales medidas hasta el presente (sólo la partícula de Higgs corresponde, en el modelo estándar de las interacciones fundamentales, a una partícula de espín nulo, cuya ecuación clásica de movimiento es la de Klein-Gordon).

En la deducción de su famosa ecuación, Dirac partió de

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad (41)$$

donde  $\hat{H}$  es un operador en derivadas primeras con respecto a las coordenadas espaciales y  $\psi$  es un objeto de cuatro componentes complejas, es decir,  $\psi^t = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ . Propuso, entonces,

$$\hat{H}\psi = (\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} + \beta m)\psi = (-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m)\psi. \quad (42)$$

Dado que  $\psi$  tiene cuatro componentes, los cuatro coeficientes ( $\alpha_i, i = 1, 2, 3$  y  $\beta$ ) son matrices de  $4 \times 4$ . Ahora, por tratarse de una partícula libre, que satisface  $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ , debe cumplirse que  $\hat{H}^2\psi = (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2 + m^2)I\psi$ , donde  $I$  es la matriz identidad de  $4 \times 4$ . Esta condición se escribe:

$$\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \hat{p}_i + \beta m\right) \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j \hat{p}_j + \beta m\right) \psi = (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2 + m^2) I\psi$$

o, equivalentemente,

$$\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \hat{p}_i^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i} \alpha_i \alpha_j \hat{p}_i \hat{p}_j + m \sum_{j=1}^3 (\beta \alpha_j + \alpha_j \beta) + \beta^2 m^2\right) \psi \quad (43)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^3 \hat{p}_i^2 + m^2\right) I\psi. \quad (44)$$

De la ecuación anterior resultan condiciones para las cuatro matrices, a saber,

$$\begin{aligned} \alpha_i^2 &= I \quad i = 1, 2, 3 \\ \alpha_i \alpha_j &= -\alpha_j \alpha_i \quad \forall i \neq j \\ \beta \alpha_j &= -\alpha_j \beta \quad j = 1, 2, 3 \\ \beta^2 &= I. \end{aligned} \quad (45)$$

V.1 INTENTOS DE CONSTRUIR UNA MECÁNICA CUÁNTICA  
RELATIVISTA. PROBLEMAS DE INTERPRETACIÓN

---

Volviendo a la ecuación (42) y multiplicando ambos miembros por  $\beta$ , se tiene:

$$\left( \beta i \partial_t + \beta \vec{\alpha} \cdot i \vec{\nabla} - mI \right) \psi = 0.$$

Si se definen nuevas matrices de  $4 \times 4$  según  $\gamma^0 = \beta$ ,  $\gamma^i = \beta \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , la ecuación de Dirac puede reescribirse

$$\left( \gamma^0 i \partial_t + \vec{\gamma} \cdot i \vec{\nabla} - mI \right) \psi = 0.$$

En notación covariante de Lorentz, la ecuación se escribe

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - mI) \psi = 0 = (i\rlap{/}\partial - mI) \psi, \quad (46)$$

donde se ha introducido la notación usual  $\rlap{/}\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$ .

Las matrices gamma recién definidas se conocen como matrices de Dirac y es fácil ver, usando su definición y las propiedades (45), que las mismas satisfacen

$$(\gamma^0)^2 = I \quad (\gamma^i)^2 = -I \quad i = 1, 2, 3 \quad \gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 0 \quad \forall \alpha \neq \beta.$$

Dichas propiedades pueden escribirse en forma resumida como

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2g^{\alpha\beta} I, \quad (47)$$

donde  $g^{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  es la matriz inversa de la métrica del espacio de Minkowski.

Las relaciones (47) no determinan unívocamente el conjunto de cuatro matrices a usar en la ecuación. Dado un conjunto de matrices que satisfacen esas condiciones, cualquier otro conjunto de cuatro matrices, relacionadas con las originales mediante una transformación de semejanza, satisface las mismas relaciones de anticonmutación. En efecto, si definimos  $\tilde{\gamma}^\alpha = S^{-1} \gamma^\alpha S$ , con  $S$  una matriz invertible de  $4 \times 4$ , se tendrá:

$$\begin{aligned} \{\tilde{\gamma}^\alpha, \tilde{\gamma}^\beta\} &= S^{-1} \gamma^\alpha S S^{-1} \gamma^\beta S - S^{-1} \gamma^\beta S S^{-1} \gamma^\alpha S \\ &= S^{-1} \{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} S = 2g^{\alpha\beta} S^{-1} I S = 2g^{\alpha\beta} I. \end{aligned}$$

Por otra parte, la ecuación de Dirac original (46) puede reescribirse:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - mI) S S^{-1} \psi = 0$$

o, multiplicando a izquierda por  $S^{-1}$ ,

$$(iS^{-1} \gamma^\mu S \partial_\mu - mI) S^{-1} \psi = 0.$$

Si definimos espinores transformados  $\tilde{\psi} = S^{-1} \psi$ , esta última ecuación adopta la forma

$$(i\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu - mI) \tilde{\psi} = 0,$$

## V.1 INTENTOS DE CONSTRUIR UNA MECÁNICA CUÁNTICA RELATIVISTA. PROBLEMAS DE INTERPRETACIÓN

---

que es la ecuación de Dirac (46), escrita con el nuevo conjunto de matrices gamma y queda claro que ambas versiones de la ecuación son equivalentes. A estos posibles conjuntos de matrices gamma se los conoce como distintas representaciones de las matrices de Dirac. Entre las posibles representaciones, las más usuales son la representación de Dirac-Pauli:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde  $\sigma^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  son las matrices de Pauli ya introducidas en capítulos anteriores, y la representación quiral o de Weyl:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_{2 \times 2} \\ -I_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Pero, ciertamente, estas no son las únicas posibilidades. Según vimos, cualquier transformación de semejanza conducirá a otra representación igualmente válida.

A partir de un dado conjunto de cuatro matrices de Dirac puede definirse una quinta matriz, dada por  $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ . Es fácil ver que  $(\gamma^5)^2 = I$  y que  $\gamma^5$  anticonmuta con cada una de las cuatro matrices de Dirac. Su expresión depende, ciertamente, de la representación elegida. Por ejemplo, en la representación quiral,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix}.$$

Hemos dicho que la ecuación de Dirac describe la dinámica de una partícula de espín 1/2. Justificaremos esta afirmación en lo que sigue.

Para verlo, volvamos a escribir el hamiltoniano de Dirac en la forma

$$\hat{H}\psi = (\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m) = (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m).$$

Dado que  $[x_i, p_j] = i\delta_{ij}$ , el operador momento angular orbital  $\hat{L} = \hat{\vec{r}} \wedge \hat{\vec{p}}$  no conmuta con el hamiltoniano y no es, por lo tanto, una cantidad conservada. El operador que debe sumársele vectorialmente a  $\hat{L}$  para conseguir un operador que sí conmute con  $\hat{H}$  será el espín de la partícula de Dirac. Veamos qué ocurre con la componente  $\hat{L}_z$ . En este caso, es fácil verificar que

$$[\hat{H}, \hat{L}_z] = [\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}, \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x] = i(\alpha_2\hat{p}_x - \alpha_1\hat{p}_y).$$

Si definimos  $\hat{S}_z = -\frac{i}{2}\alpha_1\alpha_2 = \frac{i}{4}[\gamma^1, \gamma^2]$ , se muestra que

$$[\hat{H}, \hat{S}_z] = -\frac{i}{2}[\alpha_1\hat{p}_x + \alpha_2\hat{p}_y, \alpha_1\alpha_2] = -i(\alpha_2\hat{p}_x - \alpha_1\hat{p}_y).$$

Por lo tanto,  $[\hat{H}, \hat{L}_z + \hat{S}_z] = 0$ . Lo mismo ocurre con las dos componentes restantes, con  $\hat{S}_x = \frac{i}{4}[\gamma^2, \gamma^3]$  y  $\hat{S}_y = \frac{i}{4}[\gamma^3, \gamma^1]$ . Resumiendo,  $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ , suma vectorial del impulso angular orbital y el espín, es el impulso angular conservado.

Ahora bien, puede verse (por ejemplo, en la representación quiral de las matrices de Dirac) que  $\hat{S}^2 = \frac{3}{4}I = s(s+1)I$ , con  $s = \frac{1}{2}$ , lo cual muestra que el espín de la partícula es  $s = \frac{1}{2}$ .

A diferencia de lo que ocurre con la ecuación de Klein-Gordon, para la ecuación de Dirac es posible definir una cantidad conservada (carga) siempre no negativa. En efecto, si se definen densidades de carga y de corriente como sigue:

$$j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi, \quad j^i = \bar{\psi}\gamma^i\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\psi, \quad (48)$$

donde hemos definido el llamado espinor conjugado de Dirac,  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ , puede demostrarse (lo veremos como un ejemplo de aplicación del Teorema de Noether, cuando estudiemos Teoría de Campos a nivel clásico) que se satisface la ecuación de continuidad:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_t j^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

De esa ecuación de continuidad, integrada sobre todo el espacio-tiempo se deduce, igual que lo hicimos para la ecuación de Klein-Gordon, que  $J^0 = \int d^3x j^0$  es una cantidad conservada. Además, de la expresión  $j^0 = \psi^\dagger\psi = (\psi^\dagger)^*\psi$  es evidente que la densidad de carga es siempre positiva. Por lo tanto, la ecuación de Dirac ha resuelto uno de los obstáculos para conciliar la teoría de la Relatividad Especial con la Mecánica Cuántica de una partícula. Sin embargo, persiste el problema de la existencia de infinitos estados con energías tan negativas como se quiera. En esas condiciones, una partícula de Dirac elegiría decaer a estados de energía tan negativa como tiene disponible y la teoría no resultaría estable. La solución a este problema, como ya hemos anticipado, se encuentra en la Teoría de Campos, que estudiaremos a continuación.

## V.2. Teorías de Campos Relativistas

### V.2.1. Construcción de acciones clásicas. Ecuaciones clásicas de movimiento y cargas conservadas

Como ya se adelantó, en este contexto supondremos que un dado sistema está caracterizado por un campo (función de los puntos del espacio-tiempo de Minkowski), que ya no se entenderá como una función de onda y escribiremos la acción clásica correspondiente. A partir de dicha acción, determinaremos las ecuaciones clásicas de movimiento, usando las ecuaciones de Euler-Lagrange y buscaremos soluciones generales de las mismas. Luego, reemplazaremos los coeficientes en dichas soluciones generales por operadores de creación y aniquilación de partículas a partir de un estado de vacío, para pasar a la Teoría Cuántica de Campos.

Al construir la acción clásica, impondremos ciertos requisitos:

1) Que sean locales, es decir, que todos los campos y las derivadas de los campos que aparezcan en ellas estén evaluados en un mismo punto del espacio-tiempo. Esto requiere, como veremos, la invariancia de los campos frente a traslaciones rígidas en el espacio-tiempo, que son algunas transformaciones del grupo de Lorentz-Poincaré.

2) Que las acciones sean invariantes frente a transformaciones del grupo propio de Lorentz (ver [20]). Este requisito garantiza la obtención de teorías consistentes con la Teoría de la Relatividad Especial. La invariancia frente a transformaciones discretas del grupo de Lorentz (paridad e inversión temporal, o la combinación de ambas) no necesariamente debe ser respetada. Por ejemplo, la teoría de Glashow-Salam-Weinberg para las interacciones electrodébiles no presenta invariancia frente a paridad (presupone la existencia de neutrinos izquierdos y no derechos).

3) Que involucren, a lo sumo, dos derivadas de los campos en cada término. Este requisito garantiza que las ecuaciones clásicas de movimiento presenten, a lo sumo, derivadas segundas de los campos. Puede mostrarse que ecuaciones de orden superior violan la causalidad.

4) En los casos en que, además de las simetrías espacio-temporales de Lorentz existan simetrías internas (por ejemplo, simetrías de gauge, que discutiremos más adelante), exigiremos que las acciones sean invariantes frente a las correspondientes transformaciones.

La acción clásica será de la forma:

$$S = \int d^4x \sum_{a=1, \dots, n} \mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu \Phi_a),$$

donde el índice discreto  $a$  distingue los distintos tipos de campos independientes de la teoría ( $n$  en total).  $\mathcal{L}$  se conoce como la densidad lagrangiana de la teoría y es construida respetando los requisitos anteriormente enumerados. De aquí se ve que, dado que la medida es invariante frente a traslaciones rígidas en el espacio-tiempo, los campos deben ser tales que, cuando  $x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + d^\mu$ , con  $d^\mu$  constante, debe ser  $\Phi_a(x^{\mu'}) = \Phi_a(x)$ . También se ve que la invariancia de la acción frente a transformaciones del grupo Lorentz requiere campos que se transformen frente a las mismas como corresponde a alguna representación tensorial del grupo, de modo de poder construir una densidad lagrangiana escalar (invariante).

En forma similar a lo que se hace en la formulación lagrangiana de la Mecánica Clásica, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange se obtienen exigiendo que la variación de la acción se anule cuando se realizan variaciones de los campos nulas en los bordes del espacio-tiempo. Tales ecuaciones resultan:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0, \quad a = 1, \dots, n. \quad (49)$$

En estas condiciones, vale el teorema debido a la matemática Emmy Noether (1882-1935), que enunciaremos sin demostración:

*Si la acción clásica resulta invariante frente a una dada transformación de campos y/o coordenadas cuando se satisfacen las ecuaciones clásicas de movimiento, existe una tetra densidad de corriente que satisface la ecuación de continuidad y, por lo tanto, existe una carga clásicamente conservada.*

Más explícitamente:

Dadas transformaciones de la forma:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu, \quad \Phi_a \rightarrow \Phi_a + \delta \Phi_a,$$

si puede mostrarse usando las ecuaciones clásicas de movimiento que, frente a las mismas, la acción permanece invariante, es decir  $\delta S = 0$ , entonces el tetravector densidad de corriente, cuyas componentes están dadas por:

$$j^\mu = \sum_a \left\{ \left[ -\mathcal{L} \delta_\nu^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \right] \delta x^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \delta \Phi_a \right\}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (50)$$

satisface la ecuación de continuidad  $\partial_\mu j^\mu = 0$ .

Por supuesto,  $j^\mu$  multiplicada por un factor constante arbitrario seguirá satisfaciendo la ecuación de continuidad.

Como consecuencia de esta última ecuación,  $J^0 = \int d^3x j^0$  es una carga conservada. Como ejemplos de cargas conservadas asociadas con las simetrías espacio temporales de Lorentz-Poincaré se tienen: energía, impulso e impulso angular. En estos casos, ambos términos contribuyen a la densidad de corriente. Si se trata de simetrías internas, en que sólo se transforman los campos, mientras los puntos del espacio tiempo no sufren transformaciones, sólo el segundo término en (50) contribuye a la densidad de corriente. El ejemplo más notorio de este caso es la densidad de corriente eléctrica, asociada con la invariancia frente a transformaciones locales (de gauge) del grupo  $U(1)$  de la acción de la Electrodinámica. Lo veremos en detalle más adelante.

Conocida la acción clásica, la cuantización se realiza en analogía con la cuantización de la mecánica de una partícula. En primer lugar, se determina la cantidad canónicamente conjugada con cada uno de los campos (similares a los impulsos canónicamente conjugados de cada coordenada en el caso de una partícula):

$$\Pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Phi_a)} (\Phi_a, \partial_\mu \Phi_b).$$

De esta última ecuación, se despejan las derivadas de los campos,  $\partial_\mu \Phi_b (\Phi_a, \Pi_a)$  y se construye la densidad hamiltoniana:

$$\mathcal{H} (\Phi_a, \Pi_a) = \sum_a \Pi_a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L} (\Phi_a, \Pi_a).$$

Finalmente, se pasa a la teoría cuántica transformando los campos y sus campos canónicamente conjugados en operadores e imponiendo, a tiempos iguales, las relaciones de conmutación (o, como veremos, de anticonmutación para campos de espín semientero):

$$\left[ \hat{\Phi}_a(t, \vec{x}), \hat{\Pi}_b(t, \vec{x}') \right] = i\mathcal{J} \delta_{ab} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'),$$

donde  $\mathcal{J}$  es el operador identidad sobre el espacio de Hilbert,  $\delta_{ab}$  es la función delta de Kronecker ( $\delta_{ab} = 1$  si  $a = b$  y  $\delta_{ab} = 0$  si  $a \neq b$ ). Por otra parte,  $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$  es la

distribución delta de Dirac. La misma puede definirse, aunque de modo poco riguroso, por su propiedad:

$$\int d^3x' \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') f(\vec{x}') = f(\vec{x}),$$

donde  $x$  pertenece a la región de integración y  $f(x)$  es cualquier función (de prueba) que admita infinitas derivadas y sólo sea no nula en una región espacial finita que incluya  $\vec{x}$ .

Estudiaremos, a continuación, las acciones clásicas correspondientes a campos libres de espín cero (escalar),  $1/2$  (de Dirac) y  $1$  (electromagnético), sus correspondientes ecuaciones clásicas de movimiento, simetrías internas y correspondientes cargas conservadas. Todos estos campos tienen propiedades de transformación definidas frente a transformaciones del grupo propio de Lorentz, lo cual permite construir acciones invariantes frente a dichas transformaciones. En el caso del campo escalar, veremos cómo se pasa a la teoría cuántica. En los casos restantes, nos limitaremos a mencionar las principales diferencias del proceso de cuantización con el correspondiente a un campo escalar.

## V.2.2. Teorías de campos libres

### Teoría clásica para el campo escalar complejo libre con masa

La densidad lagrangiana para un campo escalar (espín cero) libre, con masa  $m$  está dada por:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi, \quad (51)$$

donde  $\varphi$  y  $\varphi^*$  serán tratados como campos independientes. Nótese que, según los requerimientos generales, esta densidad lagrangiana es invariante frente a transformaciones del grupo propio de Lorentz- Poincaré. En efecto, si  $\varphi$  y  $\varphi^*$  son escalares de Lorentz (permanecen invariantes ante tales transformaciones),  $\partial^\mu \varphi^*$  se transforma como un vector contravariante y  $\partial_\mu \varphi$  lo hace como un vector covariante. Por lo tanto la contracción de ambos (recordar que hay una suma implícita sobre  $\mu$ ) resulta invariante. El término de masa también lo es, de modo evidente.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange (49) se escriben, en este caso:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0, \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} = 0$$

y conducen, teniendo en cuenta la forma explícita de  $\mathcal{L}$ , a:

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi^* - m^2 \varphi^* = 0, \quad \partial_\mu \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi = 0.$$

Se ve, entonces, que tanto  $\varphi$  como  $\varphi^*$  satisfacen, como ecuación clásica de movimiento, la ecuación de Klein-Gordon, estudiada en la sección V.1.1.

Aparte de la invariancia frente a transformaciones del espacio-tiempo, la teoría es invariante frente a las siguientes transformaciones de campos, que no afectan a las coordenadas (simetría interna):

$$\varphi \rightarrow e^{i\alpha} \varphi, \quad \varphi^* \rightarrow e^{-i\alpha} \varphi^*, \quad (52)$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ , cualquier número real, el mismo en todos los puntos del espacio-tiempo.

Es muy fácil verificar que tal invariancia existe. En efecto, frente a dicha transformación de los campos se tiene:

$$\mathcal{L} \rightarrow \partial^\mu (e^{-i\alpha} \varphi^*) \partial_\mu (e^{i\alpha} \varphi) - m^2 e^{-i\alpha} \varphi^* e^{i\alpha} \varphi. \quad (53)$$

Dado que  $\alpha$  no depende del punto, las exponenciales pasan a través de las derivadas y se cancelan, resultando que el lagrangiano transformado coincide con el original. Nótese que estas transformaciones de los campos corresponden a multiplicarlos por una "matriz" unitaria de  $1 \times 1$  (si  $U = e^{i\alpha}$ ,  $U^\dagger = e^{-i\alpha}$  y se satisface la condición de unitariedad  $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$ ). se dice que la teoría tiene una invariancia  $U(1)$ , o que  $U(1)$  es una simetría interna de la teoría de un campo escalar.

Como se recordará, el teorema de Noether predice, entonces, la existencia de una densidad de corriente que satisface la ecuación de continuidad. Tal corriente, está dada por la expresión (50) que, en este caso, se reduce a:

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} \delta \varphi^*.$$

Si consideramos variaciones infinitesimales de los campos, para las cuales  $e^{i\alpha} \sim 1 + i\alpha$  y  $e^{-i\alpha} \sim 1 - i\alpha$ , y derivamos la densidad lagrangiana (51), encontramos:

$$j^\mu = i\alpha (\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*). \quad (54)$$

Como vemos, esta densidad de corriente, salvo por el factor multiplicativo constante, que es siempre arbitrario, coincide exactamente con la densidad de corriente encontrada al estudiar la ecuación de Klein-Gordon.

### Cuantización del campo escalar complejo libre

La densidad lagrangiana (51) puede reescribirse haciendo explícita la suma sobre  $\mu$ , para obtener:

$$\mathcal{L} = \partial_0 \varphi^* \partial_0 \varphi - \sum_{i=1}^3 \partial_i \varphi^* \partial_i \varphi - m^2 \varphi^* \varphi.$$

Las cantidades canónicamente conjugadas de ambos campos son, entonces:

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^*, \quad \Pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = \dot{\varphi}. \quad (55)$$

La densidad Hamiltoniana, escrita en términos de  $\Pi$ ,  $\Pi^*$  y las derivadas de los campos resulta, entonces,

$$\mathcal{H} = \Pi^* \Pi + \vec{\nabla} \varphi^* \cdot \vec{\nabla} \varphi + m^2 \varphi^* \varphi. \quad (56)$$

Ahora bien, dado que ambos campos satisfacen la ecuación de Klein-Gordon, podemos escribir las soluciones clásicas más generales para ambos en la forma:

$$\begin{aligned}\varphi &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k}} \left( a_k e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + c_k e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right) \\ \varphi^* &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k}} \left( b_k e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + d_k e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right),\end{aligned}\quad (57)$$

con  $\omega_k = +\sqrt{k^2 + m^2}$ . Los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  multiplican soluciones de energía positiva ( $E = +\omega_k$ ). Los coeficientes  $c_k$  y  $d_k$ , en cambio, acompañan a las soluciones de energía negativa ( $E = -\omega_k$ ). Pero estos coeficientes indeterminados en ambas soluciones generales no son independientes, dado que los campos deben ser uno conjugado del otro. Por lo tanto,  $c_k = b_k^*$  y  $d_k = a_k^*$ , de modo que tenemos, para los campos clásicos:

$$\begin{aligned}\varphi &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k}} \left( a_k e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + b_k^* e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right) \\ \varphi^* &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k}} \left( b_k e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + a_k^* e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right).\end{aligned}\quad (58)$$

Ahora reemplazaremos los coeficientes indeterminados por operadores que actúan sobre un espacio vectorial abstracto, que constituye un espacio de Hilbert. Reemplazaremos  $a_k$  y  $b_k$ , por sendos operadores  $\hat{a}_k$  y  $\hat{b}_k$ . Los primeros, cada vez que actúan sobre un vector del espacio de Hilbert, destruyen una partícula de tipo  $a$ . Los segundos, destruyen partículas de tipo  $b$ . A ambos se los denomina operadores de destrucción. A su vez, los coeficientes numéricos  $a_k^*$  y  $b_k^*$  serán reemplazados por sendos operadores,  $\hat{a}_k^\dagger$  y  $\hat{b}_k^\dagger$ , adjuntos de los anteriores. Los primeros, actuando sobre el espacio de Hilbert, crean partículas de tipo  $a$  y los segundos, crean partículas de tipo  $b$ . A ambos se los denomina operadores de creación. Todos los vectores del espacio de Hilbert pueden obtenerse aplicando operadores de creación sobre uno, llamado el estado de vacío y anotado  $|0\rangle$ , que satisface:

$$\hat{a}_k |0\rangle = \hat{b}_k |0\rangle = 0, \forall k.$$

Así, por ejemplo,  $\hat{a}_k^\dagger |0\rangle$  representa un estado en que existe una partícula de tipo  $a$ , con impulso  $k$ . A su vez,  $\hat{b}_k^\dagger \hat{a}_k^\dagger |0\rangle$  es un estado que contiene una partícula de tipo  $a$ , con impulso  $k$  y una de tipo  $b$ , con impulso  $k'$ .

Ahora, nuestros campos se han transformado en operadores:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k}} \left( \hat{a}_k e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \hat{b}_k^\dagger e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right) \\ \hat{\varphi}^\dagger &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k}} \left( \hat{b}_k e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \hat{a}_k^\dagger e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right).\end{aligned}\quad (59)$$

El campo  $\hat{\varphi}$  destruye partículas de tipo  $a$  y crea partículas de tipo  $b$ , mientras  $\hat{\varphi}^\dagger$  destruye partículas de tipo  $b$  y crea partículas de tipo  $a$ .

También  $\hat{\Pi}$  y  $\hat{\Pi}^*$  son ahora operadores sobre el espacio de Hilbert y, a partir de sus expresiones en (55) se ve que adoptan la forma:

$$\begin{aligned}\hat{\Pi} &= \partial_t \hat{\varphi}^\dagger = - \int d^3k \frac{i\omega_k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k}} \left( \hat{b}_k e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} - \hat{a}_k^\dagger e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right) \\ \hat{\Pi}^\dagger &= \partial_t \hat{\varphi} = - \int d^3k \frac{i\omega_k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k}} \left( \hat{a}_k e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} - \hat{b}_k^\dagger e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right).\end{aligned}\quad (60)$$

Es sobre estos operadores y sobre los operadores de campo que debemos imponer la relaciones de conmutación a tiempos iguales

$$\left[ \hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}') \right] = i\mathcal{J}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad \left[ \hat{\varphi}^\dagger(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^\dagger(t, \vec{x}') \right] = i\mathcal{J}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

y los restantes conmutadores nulos. De imponer estas condiciones, resultan relaciones de conmutación entre los operadores de creación y destrucción:

$$\left[ \hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger \right] = \left[ \hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger \right] = (2\pi)^3 2\omega_k \mathcal{J} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (61)$$

El hamiltoniano, obtenido integrando (56) sobre toda la región espacial, también se ha transformado en un operador, y está dado por:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \hat{b}_k \hat{b}_k^\dagger \right).$$

Utilizando las relaciones de conmutación (61), la última expresión puede reescribirse:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \mathcal{J} \delta^3(0) \right).$$

La delta de Dirac en el último término ha sido encomillada porque carece de sentido. En efecto, dicha distribución diverge cuando su argumento se anula. Para evitar esta verdadera catástrofe en la teoría, se impone, sobre todos los operadores de la teoría, la llamada prescripción de orden normal, que consiste en usar las reglas de conmutación para escribir todos los operadores de destrucción a la derecha de los operadores de destrucción, y eliminar los términos proporcionales al operador identidad. Adoptando esta prescripción tenemos, para el hamiltoniano de la teoría ordenado normalmente:

$$: \hat{H} := \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \right),$$

donde el símbolo  $::$  indica que hemos tomado los operadores en orden normal. Vemos que ambos tipos de partículas, tanto las creadas por los  $\hat{a}^\dagger$  como las creadas por  $\hat{b}^\dagger$ , contribuyen con signo positivo al operador hamiltoniano.

Procediendo del mismo modo con la carga obtenida al integrar sobre todo el espacio  $j^0$ , dada en (54), se obtiene

$$: J^0 := \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \right).$$

Nótese que las partículas de tipos  $a$  y  $b$  contribuyen a la carga cuántica con signos opuestos. Como consecuencia de los dos últimos comentarios, vemos que unas son las antipartículas de las otras y que hemos reinterpretado las soluciones de energías negativas como antipartículas de energías positivas.

### Teoría de campos de Dirac (espín 1/2) libre con masa

En este caso, la densidad lagrangiana de la teoría clásica se escribe:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi, \quad (62)$$

donde  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$  es el espinor conjugado de Dirac ya definido.

La expresión anterior suele escribirse, en forma abreviada:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left( \bar{\psi}\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu\psi \right) - m\bar{\psi}\psi, \quad (63)$$

A partir de este lagrangiano es fácil, tratando a  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  como campos independientes, determinar las ecuaciones clásicas de movimiento usando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = 0, \quad \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = 0,$$

que dan por resultado:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \quad \bar{\psi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0,$$

donde  $\overleftarrow{\partial}_\mu$  indica que las derivadas actúan sobre el espinor que está a su izquierda.

Obsérvese que  $\psi$  satisface la ecuación de Dirac. Nótese también que, si se reemplazan estas ecuaciones de movimiento en la densidad lagrangiana, la misma se anula, lo cual indica que se tiene una teoría clásica que es trivial. Sin embargo, la teoría cuántica que se deriva de ella no lo es.

Además de ser invariante frente a transformaciones espacio-temporales del grupo de Lorentz-Poincaré, la acción respeta la simetría interna global  $U(1)$  correspondiente a las transformaciones:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\alpha},$$

con  $\alpha$  un número real arbitrario (el mismo en todos los puntos del espacio-tiempo).

La densidad de corriente de Noether asociada con esta invariancia puede obtenerse a partir del teorema de Noether (50):

$$j^\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi - \delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}.$$

Una vez calculadas las derivadas de (63) necesarias, y considerando transformaciones infinitesimales, para las cuales  $\delta\psi = i\alpha\psi$ ,  $\delta\bar{\psi} = -i\alpha\bar{\psi}$ , se obtiene:

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (64)$$

que coincide, salvo una eventual constante multiplicativa, con el tetravector discutido en la sección V.1.2. La integral de su componente cero es una carga conservada que, como veremos al estudiar la Electrodinámica Cuántica, donde la simetría  $U(1)$  se transforma en local (de gauge), no es otra cosa que la carga eléctrica de las partículas de materia masivas, representadas por espinores de Dirac.

En el caso particular de campos de Dirac sin masa existe, como puede demostrarse fácilmente recordando que  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ , otra simetría interna, conocida como  $U(1)$  quiral. En efecto, el lagrangiano resulta invariante frente a  $\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5}\psi$ ,  $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\alpha\gamma^5}$ . La correspondiente densidad de corriente de Noether es:

$$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi.$$

La cuantización de campos de Dirac se realiza de modo análogo a como lo hemos hecho en el caso escalar, salvo por una diferencia crucial: en lugar de las relaciones de conmutación (61), los operadores de creación y aniquilación (caracterizados ahora por un segundo subíndice, que rotula los posibles valores de la proyección del espín) satisfacen relaciones de anticonmutación:

$$\{\hat{a}_{k,s}, \hat{a}_{k',s'}^\dagger\} = \{\hat{b}_{k,s}, \hat{b}_{k',s'}^\dagger\} = (2\pi)^3 2\omega_k \mathcal{J} \delta_{s,s'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}').$$

Esta diferencia tiene una consecuencia de la mayor importancia: implica que, a diferencia de las partículas escalares, de las cuales un número ilimitado puede convivir en un mismo estado (tienen, por lo tanto, la estadística de Bose Einstein) las partículas de Dirac satisfacen la estadística de Fermi-Dirac y respetan, en consecuencia, el principio de exclusión. Este es un hecho general: las partículas de espín entero son bosones, las de espín semientero son fermiones. Es interesante destacar aquí que sólo en el marco de la Teoría Cuántica de Campos Relativista puede demostrarse formalmente la relación espín-estadística. En efecto, si queremos crear, a partir del vacío, dos partículas con los mismos números cuánticos tendríamos, por ejemplo,

$$\hat{a}_{k,s}^\dagger \hat{a}_{k,s}^\dagger |0\rangle = -\hat{a}_{k,s}^\dagger \hat{a}_{k,s}^\dagger |0\rangle = 0,$$

como resultado de las reglas de anticonmutación. Nótese que tal situación no está prohibida en el caso del campo escalar, donde valen reglas de conmutación. Por lo tanto, las partículas correspondientes son fermiones en el caso presente y bosones en el caso escalar.

### Teoría clásica para el campo vectorial (espín 1) sin masa: El Electromagnetismo sin fuentes en notación covariante de Lorentz

La dinámica clásica del sistema se obtendrá escribiendo la densidad lagrangiana para el campo  $A$ , llamado potencial vector, de componentes  $A^0(t, \vec{x}) = \phi(t, \vec{x})$ ,  $\vec{A} = \vec{A}(t, \vec{x})$ , donde  $\phi(t, \vec{x})$  es el potencial escalar de la formulación no covariante de Lorentz y  $\vec{A}(t, \vec{x})$  es el potencial vector de la misma formulación. (Recuerde que los campos electromagnéticos están dados por  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_0\vec{A}$ ,  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ ).

A partir del campo  $A : (A^0, \vec{A})$ , cuyas componentes  $A^\mu$  se transforman ante transformaciones de Lorentz como corresponde a un tetravector contravariante, puede definirse un tensor de segundo orden, dos veces covariante, conocido como tensor de campos, de la siguiente manera:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu}, \quad (65)$$

donde hemos puesto de manifiesto que se trata de un tensor antisimétrico ante el intercambio de sus dos índices. La densidad lagrangiana de la teoría clásica se escribe de modo muy sencillo en términos del tensor de campos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

Dado que los índices espacio-temporales están contraídos, se trata, evidentemente de un invariante de Lorentz. En términos del potencial vector, se tiene:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu).$$

Utilizando la fórmula de Euler-Lagrange para cada componente del campo se obtienen las ecuaciones clásicas de movimiento. Escritas en términos del tensor de campos, adoptan la forma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_0 F^{0\nu} + \partial_j F^{j\nu} = 0.$$

Es directo verificar que, reescritas en términos de los campos eléctrico y magnético las mismas no son otra cosa que la ecuaciones de Maxwell llamadas inhomogéneas, en ausencia de cargas. En efecto, para  $\nu = 0$ , resulta  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , mientras los índices  $\nu$  espaciales conducen a  $-\partial_t \vec{E} + \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0$ .

Notemos que las dos restantes ecuaciones de Maxwell (homogéneas, incluso, en presencia de cargas) no aparecen a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Sin embargo, son una consecuencia inmediata del carácter antisimétrico del tensor de campos, que satisface las llamadas identidades de Bianchi:

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0.$$

Reescritas en términos de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , estas ecuaciones son  $\partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$  y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ .

Particularmente importante (como se verá cuando estudiemos la Electrodinámica cuántica) es la invariancia de la densidad lagrangiana ante transformaciones de los campos:

$$A_\mu(t, \vec{x}) \rightarrow A_\mu(t, \vec{x}) + \partial_\mu \alpha(t, \vec{x}),$$

donde la función  $\alpha(t, \vec{x})$  es invariante ante transformaciones de Lorentz.

A esta simetría interna, válida para el campo electromagnético libre, se la conoce como invariancia de gauge del electromagnetismo. Veremos, en nuestro estudio de la Electrodinámica, donde el campo vectorial se acopla con la corriente  $U(1)$  de los campos de

Dirac de materia, la invariancia de la teoría requiere la transformación simultánea de ambos tipos de campos.

Siempre de acuerdo con el teorema de Noether, La densidad de corriente que, en el presente caso, satisface la ecuación de continuidad es:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu A_\nu} \delta A_\nu = -F^{\mu\nu} \partial_\nu \alpha,$$

donde hemos usado la expresión explícita de  $\mathcal{L}$  y  $\delta A_\nu(t, \vec{x}) = \partial_\nu \alpha(t, \vec{x})$ .

Es interesante notar, aquí, que la carga conservada asociada con esta densidad de corriente es  $J^0 = \int d^3x j^0 = - \int d^3x F^{0i} \partial_i \alpha = - \int d^3x \partial_i (F^{0i} \alpha)$ , donde hemos integrado por partes y usado la ecuación clásica de movimiento. Dado que se trata de la integral sobre el volumen espacial de una divergencia, se reduce a una integral sobre el borde de la región (en el infinito) que se anula si los campos, como ocurre en este caso, se anulan en el infinito.

La cuantización del campo electromagnético libre se realiza en forma muy similar a como lo hicimos para el campo escalar, salvo por algunas dificultades provenientes del carácter transversal del campo electromagnético, que obliga a imponer la anulación de sus componentes longitudinales durante el proceso de cuantización y conduce al llamado método de Gupta-Bleuler.

Es importante destacar que, como en el caso del campo escalar, se obtienen en ese proceso, relaciones de conmutación para los operadores de creación y aniquilación. Las partículas de la teoría resultan, como consecuencia, bosones. Tales partículas no son otra cosa que fotones, que satisfacen la estadística de Bose-Einstein. Además, como consecuencia de nuestra reciente discusión sobre la anulación de su carga, resulta que los fotones no se acoplan consigo mismos (tampoco a nivel cuántico).

### V.2.3. Teorías de campos interactuantes

#### La Electrodinámica Cuántica (QED) y las reglas de Feynman

En Mecánica Clásica, el lagrangiano de una partícula en presencia de un campo electromagnético se obtiene reemplazando, en el lagrangiano libre:

$$E = p^0 \rightarrow p^0 - q A^0, \quad \vec{p} \rightarrow \vec{p} - q \vec{A}$$

o, escrito en forma covariante de Lorentz,  $p^\mu \rightarrow p^\mu - q A^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , donde  $q$  es la carga eléctrica de la partícula ( $-|e|$  en el caso de electrones).

Teniendo en cuenta que, al pasar a la teoría cuántica, se reemplaza  $p_\mu$  por  $-i\partial_\mu$ , resulta natural, para un campo de Dirac en interacción con el campo electromagnético, realizar en la acción libre el reemplazo  $-i\partial_\mu \rightarrow -i\partial_\mu - qA_\mu$  o, de manera equivalente,  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$ . La derivada así modificada se conoce como derivada covariante de gauge, por razones que resultarán claras más adelante. A este modo de acoplar ambos campos en interacción se le da el nombre de acoplamiento mínimo.

Al realizar esta sustitución tendremos para la porción del lagrangiano correspondiente al campo de materia en interacción:

$$\mathcal{L}_1 = \bar{\psi} \left[ \gamma^\mu \left( \frac{i \overleftrightarrow{\partial}}{2} + q A_\mu \right) - m \right] \psi. \quad (66)$$

Sumando a esta densidad lagrangiana la correspondiente al campo electromagnético libre, tendremos la densidad lagrangiana de la Electrodinámica Cuántica (QED), dada por:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} \left[ \gamma^\mu \left( \frac{i \overleftrightarrow{\partial}}{2} + q A_\mu \right) - m \right] \psi. \quad (67)$$

Nótese que esta densidad lagrangiana contiene un término,  $\bar{\psi} \left[ \gamma^\mu \frac{i \overleftrightarrow{\partial}}{2} - m \right] \psi$ , correspondiente a partículas de materia libres, usualmente llamado término cinético del campo de materia, otro correspondiente al campo electromagnético libre, o término cinético del campo electromagnético ( $-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ ) y, finalmente, un término de interacción,  $q \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$ .

Aplicando la fórmula de Euler-Lagrange a todos los campos independientes de la teoría se obtienen, para el campo electromagnético, las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu,$$

con  $j^\nu = q \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$  o, más explícitamente, en términos de los campos eléctrico y magnético:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = j^0 = q \bar{\psi} \gamma^0 \psi, \quad -\partial_t \vec{E} + \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{j} = q \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi.$$

Las ecuaciones de Maxwell homogéneas que, como ya comentamos, son consecuencia del carácter antisimétrico de  $F^{\mu\nu}$ , no cambian con respecto al caso libre.

Por su parte, los campos  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  satisfacen:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0, \quad \bar{\psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{D}_\mu + m) = 0,$$

donde  $D_\mu$  es la derivada covariante de gauge antes definida. La primera de estas ecuaciones es la ecuación de Dirac correspondiente a un campo de materia en interacción con el campo electromagnético.

Es evidente, a partir de la expresión de la densidad lagrangiana (67) que la simetría  $U(1)$  característica del campo de Dirac libre,

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\alpha},$$

con  $\alpha$  un número real arbitrario (el mismo en todos los puntos del espacio-tiempo), también es una invariancia de QED.

Pero QED resulta también invariante frente a la transformación simultánea de todos los campos de la teoría:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha(t, \vec{x})} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\alpha(t, \vec{x})}, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(t, \vec{x}). \quad (68)$$

Se dice que la electrodinámica es invariante frente a transformaciones de gauge (locales) basadas en el grupo  $U(1)$  (los campos de materia se multiplican por elementos de ese grupo, es decir, matrices unitarias de  $1 \times 1$  o, lo que es igual, complejos de módulo 1).

En efecto, es inmediato verificar (ver ejercicio propuesto al final del capítulo) que, ante tal transformación, la derivada covariante satisface:

$$D_\mu \psi \rightarrow e^{i\alpha(t, \vec{x})} D_\mu \psi.$$

Es, precisamente, debido a este hecho que la derivada así modificada recibe el nombre de derivada covariante de gauge (frente a transformaciones de gauge se transforma COMO el campo de materia). Es esta ley de transformación, junto con la del campo  $\bar{\psi}$  y la invariancia de  $F^{\mu\nu}$  ante la transformación del campo electromagnético, la que conduce a la invariancia de nuestra densidad lagrangiana total de QED. A esta simetría interna se la conoce como invariancia  $U(1)$  (porque los campos de materia siguen siendo multiplicados por una fase escalar, que es una matriz unitaria de  $1 \times 1$ ) local (porque, ahora la fase cambia punto a punto del espacio-tiempo) o invariancia  $U(1)$  de gauge.

Es fácil comprobar que los campos de materia contribuyen a la densidad de corriente de Noether correspondiente con  $j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . Es justamente ésta la densidad de corriente que aparece en las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas para el campo electromagnético y actúa, por lo tanto, como fuente del mismo. Nótese, además, que el término de interacción en la densidad lagrangiana es, precisamente,  $j^\mu A_\mu$ .

La cuantización de los campos  $A_\mu$ ,  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  se realiza imponiendo condiciones de conmutación sobre los primeros y de anticonmutación sobre los dos últimos, según se explicó en el contexto de las correspondientes teorías libres. Este proceso conduce a una teoría de perturbaciones alrededor de la teoría libre, en la cual los órdenes sucesivos tienen números crecientes de lazos cerrados (loops) y, como consecuencia, potencias cada vez mayores de  $\hbar$ , cuando se recuperan las unidades físicas. Este desarrollo permite calcular, al orden deseado, las amplitudes de probabilidad de los diversos procesos de desintegración y dispersión predichos por QED.

Por ejemplo, si una partícula en reposo se desintegra en dos partículas finales, la probabilidad diferencial de desintegración se escribe:

$$d\Gamma = \frac{d}{2\hbar m_1} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) |M|^2 \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 2E_3},$$

donde  $d$  es un producto de factores  $\frac{1}{j!}$  por cada grupo de  $j$  partículas idénticas en el estado final,  $p_1$  es el tetraimpulso de la partícula inicial,  $p_2$  y  $p_3$  son los tetraimpulsos de las partículas en el estado final y la distribución delta de Dirac impone la conservación del tetraimpulso entre los estados inicial y final.

Similarmente, si se produce un choque entre dos partículas, que da origen a otras dos en el estado final,  $1+2 \rightarrow 3+4$ , la correspondiente probabilidad diferencial de ocurrencia del proceso, también conocida como sección eficaz diferencial del mismo, estará dada por

$$d\sigma = \frac{\hbar^2 d}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2) - m_1 m_2}} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |M|^2 \frac{c d^3 p_3}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 2E_3} \frac{c d^3 p_4}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 2E_4},$$

y expresiones similares para procesos que involucran mayor número de partículas iniciales y/o finales. Toda la dinámica del proceso estudiado está contenida en  $M$  y es esta la cantidad que se calcula en forma perturbativa en cada caso. Su valor puede representarse esquemáticamente usando los llamados diagramas de Feynman y las correspondientes reglas para obtener  $M$ , que se describen a continuación, en el espacio de impulsos.

El diagrama más simple es el de la figura 38

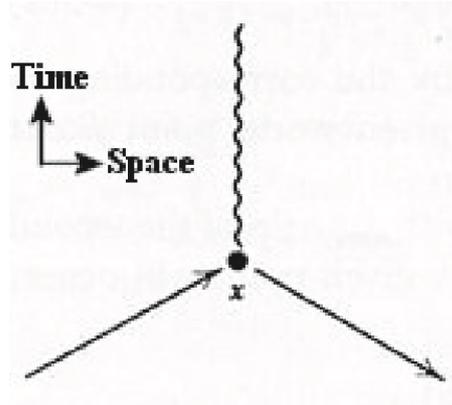


Figura 38: Diagrama correspondiente a un vértice

a) El punto  $x$  se denomina vértice. Por cada vértice debe incluirse un factor  $-i|e|\gamma^\mu$  (hemos supuesto que las partículas de materia son electrones y positrones, el valor absoluto de cuyas cargas es  $|e|$ ). Además, por cada vértice, debe escribirse un factor que imponga la conservación del tetraimpulso, dada por  $(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i)$ , donde los tetraimpulsos entrantes aparezcan con signo positivo y los salientes, con signo negativo.

Las líneas que, como en este caso, están unidas a un único vértice y no forman lazos se denominan patas externas. Para ellas, las reglas de Feynman son las siguientes:

b) Las líneas rectas pueden representar electrones o positrones. Si contienen flechas entrantes al vértice, pueden representar electrones entrantes o positrones salientes, según el proceso que estemos estudiando (en efecto, las flechas sobre líneas continuas marcan el sentido de flujo de carga negativa). En el primer caso, debe incluirse en el cálculo una solución de la ecuación de Dirac (espinor) de energía positiva (factor  $u(s, p)$ ); en el segundo, una solución de la misma ecuación con energía negativa (factor  $v(p, s)$ ). Si, en cambio, se trata de flechas salientes del vértice, pueden representar un electrón saliente o un positrón entrante. En el primer caso debe incluirse en el cálculo un espinor conjugado de Dirac de energía positiva (factor  $\bar{u}(s, p) = u(s, p)\gamma^0$ ). En el segundo, un espinor conjugado de Dirac de energía negativa (factor  $\bar{v}(s, p) = v(s, p)\gamma^0$ ).

c) Las líneas onduladas representan fotones (cuantos del campo electromagnético). Si se trata de fotones entrantes, debe incluirse un factor  $\epsilon^\mu$ , donde  $\epsilon$  es el vector de polarización del campo electromagnético. Si se trata de fotones salientes el factor será, en cambio,  $(\epsilon)^*$ .

d) Los diagramas sin lazos, llamados diagramas de orden árbol, pueden presentar, además, líneas internas (que unen dos vértices), tanto rectas como onduladas. En el caso

de las primeras, como la que aparece en el diagrama árbol para la aniquilación de un par electrón-positrón, para dar origen a dos fotones de la figura 39, debe incluirse en el cálculo un propagador de electrón o, equivalentemente, un factor  $i \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2}$ . Si se trata de líneas internas de fotón, como en el diagrama de dispersión electrón-electrón con intercambio de un fotón virtual de la figura 40, debe incluirse un propagador de fotón (factor  $-i \frac{g_{\mu\nu}}{p^2}$ ).

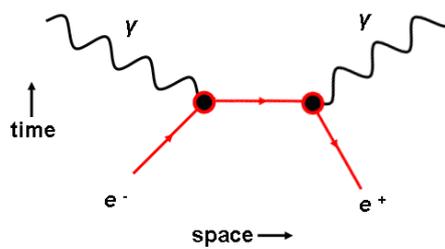


Figura 39: Diagrama árbol para la aniquilación de un par electrón-positrón

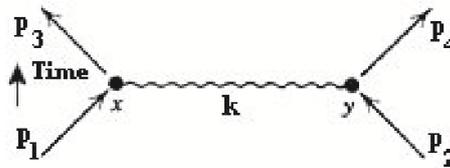


Figura 40: Diagrama árbol para la dispersión electrón-electrón

A órdenes superiores al orden árbol, aparecen las auténticas contribuciones cuánticas, en forma de diagramas con loops fermiónicos y/o fotónicos. Un ejemplo es el diagrama de la figura 41, que muestra la creación y posterior aniquilación de un par electrón-positrón virtual (no medible en forma directa).

e) Para cada loop debe integrarse, además, sobre todos los impulsos de las líneas que lo recorren. Si se trata de un loop fermiónico, como el de la figura 41, debe agregarse, además, un factor  $-1$  y tomarse la traza de todas las matrices de Dirac que hayan aparecido.

Las reglas de Feynman a)-e) darán por resultado una delta de Dirac de conservación del tetraimpulso total, acompañada del factor  $iM$ . Es el módulo al cuadrado de este último factor el que permite calcular probabilidades de desintegración y secciones eficaces de dispersión, como ya dijimos.

Ahora bien, la integración sobre tetraimpulsos internos en los diagramas con loops conduce, en general, a la aparición de divergencias. Por ejemplo, el diagrama de la figura 42, conocido como autoenergía de electrón, requiere integrar sobre el impulso interno  $q$  un factor  $\frac{1}{q^2}$  proveniente del propagador del fotón, multiplicado por otro factor  $\frac{\not{p}-\not{q}}{(p-q)^2} \sim$



Figura 41: Creación y aniquilación de un par virtual

$\frac{1}{q}$ , proveniente del propagador del electrón. Aparte de factores numéricos se tiene, para impulsos grandes, una integral del tipo

$$\int d^4q \frac{1}{|q|^3},$$

que presenta una divergencia logarítmica para impulsos  $|q| \rightarrow \infty$ .



Figura 42: Autoenergía del electrón

Estas divergencias y otras, en potencias del impulso, aparecen a todos los órdenes al calcular diagramas con loops. Para dar sentido, aún así, a la Electrodinámica Cuántica, deben aplicarse los procedimientos de regularización y renormalización. El primero consiste en aislar las partes divergentes de las partes finitas. La renormalización, consiste en agregar, en el lagrangiano clásico, los llamados contratérminos, que tengan la misma dependencia de las constantes físicas que aparece en las divergencias aisladas. Como consecuencia, las constantes físicas renormalizadas no pueden predecirse, y deben ser determinadas mediante medidas experimentales. Sin embargo, una vez medidas para una

cierta energía, la teoría predice su variación al variar esta última magnitud. Por ejemplo,

$$\beta_{QED}(\alpha) = \mu \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} > 0,$$

donde  $\mu$  es la escala de energía, de modo que la constante de acoplamiento de QED crece con la energía. A bajas energías,  $\alpha = \frac{1}{137}$  mientras que, para energías del orden de 90 GeV,  $\alpha = \frac{1}{127}$ .

Para poder concretar este proceso de renormalización es necesario que la cantidad de divergencias de distintos tipos no supere el número de constantes físicas en el lagrangiano clásico, en cuyo caso se dice que la teoría es renormalizable. Este es el caso para QED, gracias a que la misma es invariante de gauge. Notar que tal invariancia no existiría si el lagrangiano del campo mediador  $A_\mu$  tuviese un término de masa. Este es el problema que aparece al formular una teoría de campos cuántica para interacciones de corto alcance, como las interacciones débiles, según veremos en breve.

### Teoría de Yang y Mills $SU(3)$ : la Cromodinámica Cuántica (QCD)

Como hemos visto, la invariancia de la acción de QED frente a transformaciones  $U(1)$  de gauge está asegurada por la elección de un acoplamiento mínimo entre campos de materia (masivos o no) y campos de gauge  $A^\mu$  sin masa. Tal simetría garantiza la obtención de una teoría cuántica de campos renormalizable y, por lo tanto, con sentido físico. Esta construcción de teorías invariantes de gauge puede extenderse a casos en que las transformaciones de campos de materia se realicen multiplicando por fases que no sean meros números reales (matrices de  $1 \times 1$ ), sino matrices unitarias de dimensiones mayores con determinante  $+1$ . Dado que tales matrices, en general, no conmutan entre sí, el grupo de transformaciones que dejan la acción invariante será un grupo no conmutativo, también llamado no abeliano. La idea de representar las restantes interacciones fundamentales con tales teorías fue introducida, en 1954, por Chen-Ning Yang (1922-) y Robert Mills (1927-1999).

Entre estas teorías de gauge, aquella basada en el grupo  $SU(3)$  se conoce como Cromodinámica Cuántica (QCD) y describe la interacción fuerte entre quarks. Esta teoría se construye de modo muy similar a como se construye QED, pero exigiendo ahora la invariancia frente a transformaciones de fase locales de los campos fermiónicos caracterizadas por matrices del grupo  $SU(3)$  (de  $3 \times 3$ , unitarias, con determinante  $+1$ ). Tales matrices pueden escribirse como:

$$U(\theta_1, \dots, \theta_8; x) = e^{i \sum_{a=1}^8 T_a \theta_a(x)}.$$

En esta expresión,  $T_a$ ,  $a = 1, 2, \dots, 8$  son los llamados generadores del grupo, matrices de  $3 \times 3$  autoadjuntas, de traza nula,  $\theta_a(x)$ ,  $a = 1, 2, \dots, 8$  son ocho funciones arbitrarias de los puntos del espacio-tiempo, que hemos denominado  $x$ . En estas condiciones, es fácil verificar que las matrices  $U(\theta_1, \dots, \theta_8; x)$  resulta, en efecto, ser unitarias y tener determinante  $+1$ .

## V.2 TEORÍAS DE CAMPOS RELATIVISTAS

---

Deseamos construir una densidad lagrangiana que resulte invariante frente a las transformaciones de fase de los campos de materia fermiónicos

$$\psi(x) \rightarrow e^{i \sum_{a=1}^8 T_a \theta_a(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{-i \sum_{a=1}^8 T_a \theta_a(x)}, \quad (69)$$

combinadas con adecuadas transformaciones de los campos de gauge. Dado que  $U(\theta_1, \dots, \theta_8; x)$  es una matriz de  $3 \times 3$ , los campos fermiónicos serán, ahora, vectores de tres componentes (tripletes), caracterizadas por un índice llamado color:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x)_r \\ \psi(x)_g \\ \psi(x)_b \end{pmatrix}.$$

Aquí,  $r, g, b$  representan los tres posibles valores de dicho índice, llamados colores rojo, verde y azul (de ahí el nombre de Cromodinámica). Por supuesto, cada una de las tres componentes será, además, un espinor de Dirac de cuatro componentes.

Los campos de gauge  $G_\mu$  de la teoría son, como los de QED no masivos (para que exista invariancia de gauge). Pero, a diferencia del caso  $U(1)$ ,  $G_\mu$  es una matriz de  $3 \times 3$ , que puede escribirse como

$$G_\mu = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 G_\mu^a(x) T_a.$$

Aparecen, entonces, ocho campos de gauge  $G_\mu^a(x)$ ,  $a = 1, 2, \dots, 8$ , mediadores de la interacción fuerte, conocidos como gluones. Las transformaciones de los quarks dadas por la ecuación (69) dejarán invariante la acción si, al mismo tiempo, los campos de gluones se transforman según

$$G_\mu \rightarrow U(x) G_\mu U^\dagger(x) + \frac{i}{g_s} (\partial_\mu U(x)) U^\dagger(x), \quad (70)$$

donde  $g_s$  es la constante de acoplamiento de las interacciones fuertes, que aparecerá en el acoplamiento mínimo entre campos de materia y campos de gauge. Tal acoplamiento invariante de gauge se logra mediante la derivada covariante de gauge:

$$D_\mu \psi_a = \sum_{b=1}^3 (\partial_\mu I_{3 \times 3} - i g_s G_\mu)_{ab} \psi_b.$$

Con estas definiciones, la porción de la densidad lagrangiana correspondiente a los términos cinético y de masa para quarks de un dado sabor (up, down, charm, strange, top, bottom), más el término de interacción quarks-gluones, se escribe:

$$\mathcal{L}_1 = i \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi,$$

donde  $m$  es la masa de los quarks del sabor que estamos tratando y toma el mismo valor para las tres posibles componentes de color del mismo.

Es fácil demostrar que, ante las transformaciones simultáneas (69) y (70),  $D_\mu\psi \rightarrow U(x)D_\mu\psi$  y, por lo tanto,  $\mathcal{L}_1$  permanece invariante.

Para completar la densidad lagrangiana de QCD falta, aún, determinar el término cinético para los gluones. Con tal finalidad, definiremos un tensor de campos (notar el término extra con respecto a  $F_{\mu\nu}$  de QED, debido al carácter no conmutativo de QCD):

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + ig_s (G_\mu G_\nu - G_\nu G_\mu) .$$

El término cinético para los gluones en la densidad lagrangiana de QCD se escribe:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}tr[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] ,$$

donde  $tr$  significa que debe tomarse la traza sobre las matrices de  $SU(3)$  que aparecen. Este término también resulta invariante ante transformaciones de gauge y, por lo tanto, toda la densidad lagrangiana lo es.

La densidad de corriente de Noether asociada con la simetría de gauge  $SU(3)$  puede calcularse del modo habitual y sus componentes resultan:

$$j_a^\mu = g_s \left[ \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu T_a\psi + \sum_{b,c=1}^8 f_{abc}G_{\nu b}G_c^{\nu\mu} \right] , \quad (71)$$

donde las constantes  $f_{abc}$  se conocen como constantes de estructura del grupo  $SU(3)$  y están dadas por  $[T_a, T_b] = 2i \sum_{c=1}^8 f_{abc}T_c$ .

Obsérvese que hay una contribución no trivial a esta corriente debida a los campos mediadores (gluones). A diferencia de lo que ocurre en QED, la correspondiente contribución a la carga de color no se anula. Esto ocurre como consecuencia del carácter no abeliano de QCD. Por lo tanto, los gluones tienen carga y, en consecuencia, sufren la interacción fuerte o, lo que es equivalente, son autointeractuantes. Esto se ve también escribiendo las ecuaciones clásicas de movimiento de QCD, que son:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi &= 0 \\ \partial_\mu G_a^{\mu\nu} &= j_a^\nu , \end{aligned}$$

donde  $j_a^\nu$  está dada por la ecuación (71).

Esta autointeracción de los gluones conduce, al cuantizar la teoría, a la aparición de nuevos tipos de vértices, como los de las figuras 43 y 44, en los diagramas de Feynman.

La existencia de estos nuevos vértices tiene consecuencias notables, que se manifiestan al calcular la constante de acoplamiento renormalizada de la teoría. A diferencia de lo que ocurre en QED, en este caso,

$$\beta_{QCD}(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} < 0 ,$$

En efecto, el carácter no abeliano de la invariancia de gauge conduce a una constante de acoplamiento que tiende a cero a grandes energías (ultravioleta). Este régimen, en que

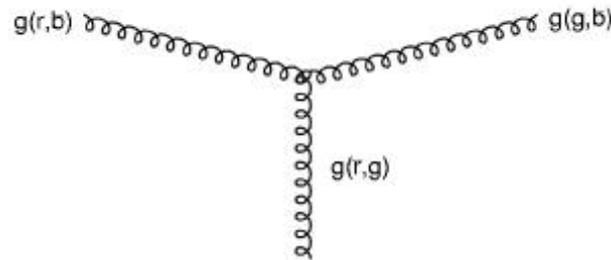


Figura 43: Vértice de tres gluones debido a la autointeracción

los quarks son partículas prácticamente libres, se conoce como el régimen de libertad asintótica y las predicciones de la teoría de perturbaciones han sido confirmadas en los experimentos de altas energías, donde se encuentra que los resultados experimentales coinciden con las predicciones de QCD perturbativa.

En cambio, también debido a la autointeracción de los gluones, la constante de acoplamiento renormalizada de QCD crece sin límite al disminuir la energía (infrarrojo). Este régimen se conoce como de esclavitud infrarroja y, para bajas energías (equivalentes a grandes distancias), la teoría de perturbaciones deja de tener sentido. Es, justamente, para grandes distancias, que QCD debería ser capaz de predecir el confinamiento de los quarks y dar origen a una teoría efectiva para la fuerza nuclear entre protones y neutrones. Pero una solución exacta, no perturbativa, de QCD no existe hasta el presente.

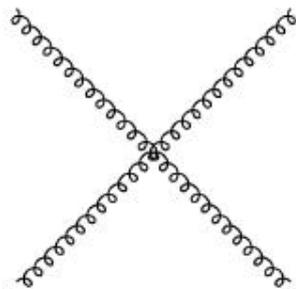


Figura 44: Vértice de cuatro gluones debido a la autointeracción

### V.3. Ejercicios sugeridos

1. Para un campo escalar complejo, la densidad lagrangiana está dada por:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi$$

- a) A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, mostrar que  $\varphi$  y  $\varphi^*$  satisfacen la ecuación de Klein-Gordon.

- b) Mostrar que la transformación de fase global  $U(1)$ , definida por  $\varphi \rightarrow e^{i\alpha}\varphi$  y  $\varphi^* \rightarrow e^{-i\alpha}\varphi^*$ , con  $\alpha$  constante, constituye una invariancia de la densidad lagrangiana y, por lo tanto, de las ecuaciones de movimiento. Determinar, usando el teorema de Noether, la corriente conservada correspondiente a esta invariancia y dar la expresión de la carga conservada.
2. Escribir el operador correspondiente a la carga asociada con la invariancia de fase, una vez cuantizados los campos. Mostrar que partículas y antipartículas contribuyen a dicha carga con signos opuestos.
3. En la representación quiral, las matrices de Dirac están dadas por:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix},$$

donde  $\sigma_i$ , con  $i = 1, 2, 3$  son las matrices de Pauli de  $2 \times 2$ . En tal representación,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

- a) Mostrar que, si un espinor de cuatro componentes se escribe como  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ , donde  $\psi_L$  y  $\psi_R$  tienen, cada uno, dos componentes, resulta que

$$\left(\frac{I + \gamma^5}{2}\right)\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

y

$$\left(\frac{I - \gamma^5}{2}\right)\psi = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} \\ \psi_R \end{pmatrix}.$$

- b) Mostrar que ambos espinores así proyectados son autofunciones de  $\gamma^5$ . Cuáles son los correspondientes autovalores?
4. a) Demostrar que, para el lagrangiano de la Electrodinámica, si se realiza sobre los campos una transformación local (de gauge) del grupo  $U(1)$ , dada por:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\alpha(x)}, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x),$$

el tensor de campos  $F^{\mu\nu}$  permanece invariante y  $D_\mu\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi$ , donde  $D_\mu = i\partial_\mu - qA_\mu$  es la derivada covariante de gauge.

- b) Usando el resultado del punto anterior, mostrar que la densidad lagrangiana clásica de la Electrodinámica es invariante frente a transformaciones de gauge  $U(1)$ .

### V.3 EJERCICIOS SUGERIDOS

---

5. En la “Electrodinámica” de Proca, donde el campo intermediario tiene una masa  $\mu$ , resulta para el potencial electrostático  $\phi$ , en ausencia de fuentes, la

$$-\Delta \phi(\vec{r}) + \mu^2 \phi(\vec{r}) = 0,$$

donde  $\Delta$  es el operador laplaciano.

I) Observar que la ecuación se reduce a la correspondiente ecuación de Maxwell cuando  $\mu = 0$ .

II) Suponiendo que existe simetría esférica y que, por lo tanto,  $\phi$  sólo depende de la distancia al origen y no de los ángulos ( $\phi(\vec{r}) = \phi(|\vec{r}|)$ ),

a) Escribir la ecuación anterior en coordenadas esféricas (puede encontrar la expresión del operador laplaciano en coordenadas esféricas, por ejemplo, en wikipedia).

b) Mostrar que  $\phi(|\vec{r}|) = C \frac{e^{-\mu |\vec{r}|}}{|\vec{r}|}$ , donde  $C$  es una constante arbitraria es una solución de la ecuación diferencial.

Este potencial es del tipo del potencial propuesto por Yukawa para las interacciones nucleares. Observar que se reduce al potencial de Coulomb para  $\mu = 0$  pero, a diferencia de este último, es de corto alcance cuando la masa del mediador es distinta de cero.

## Agradecimientos

Agradezco las numerosas sugerencias y aportes al contenido de estos apuntes realizados por los Profesores José Luis Alessandrini, Huner Fanchiotti y Fidel Schaposnik. Reservo un reconocimiento especial para el Profesor Carlos García Canal por su detallada, paciente y crítica lectura del material, que se tradujo en numerosas correcciones y sugerencias, tan útiles a la hora de conseguir una presentación más clara y consistente.

# Bibliografía

- [1] Ernest M. Henley and Alejandro García, Subatomic Physics, World Scientific, Singapore (2007).
- [2] Frank Close, Particle Physics. A Very Short Introduction , Oxford University Press (2004).
- [3] David Griffiths, Introduction to Elementary Particles; John Wiley VCH, Weinheim, Germany (2004).
- [4] Bogdan Povh, Klaus Rith, Christoph Scholz, Frank Zetsche; Particles and Nuclei. An Introduction to the Physical Concepts; Springer Verlag, Berlin (2008).
- [5] V.F. Weisskopf, Modern Physics from an elementary point of view, CERN (1969).  
Puede descargarse de [cdsweb.cern.ch/record/274976/files/p1.pdf](http://cdsweb.cern.ch/record/274976/files/p1.pdf)
- [6] Sheldon L. Glashow, El encanto de la física; Tusquets Editores, Barcelona (1995)
- [7] Frank Wilczek, Asimetría cósmica entre materia y antimateria, Revista Investigación y Ciencia 53, (febrero de 1981).
- [8] H.R. Quinn and M.S. Witherell, Revista Investigación y Ciencia, n42 (diciembre de 1998).
- [9] M. Gell-Mann, El quark y el jaguar. Aventuras en lo simple y lo complejo, Ed. Tusquets, España (2007).
- [10] y. Ne'eman and Y. Kirsh, The particle hunters, University Press, Cambridge, UK (1996).
- [11] Hermann Weyl, Symmetry, Princeton University Press, USA (1983).
- [12] G.D. Coughlan and J.E. Dodd, The ideas of Particle Physics, Cambridge University Press, UK (1991).
- [13] J. Sánchez Guillén y M. Braun, Física Cuántica, Alianza Universidad, España (1993).

- [14] A. Das and T. Ferbel, *Introduction to Nuclear and Particle Physics*, World Scientific, Singapore (2005).
- [15] W.N. Cottingham and D.A. Greenwood, *An introduction to Nuclear Physics*, Cambridge University Press, UK (2004).
- [16] F.A. Schaposnik, *Apuntes de Física IV*, <http://163.10.1.179/materias.html>
- [17] W.N. Cottingham and D.A. Greenwood, *An introduction to the Standard Model of Particle Physics*, Cambridge University Press, UK (2007).
- [18] M. Veltman, *Facts and Mysteries in Elementary Particle Physics*, World Scientific, Singapore (2003).
- [19] S. Weinberg, *The Discovery of Subatomic Particles*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2003.
- [20] H. Falomir, *Curso de Métodos de la Física Matemática- Tomo II: Teoría de Grupos*, EDULP (2015).
- [21] J.I. Illana, *Teoría Cuántica de Campos (apuntes de la Universidad de Granada)* (2018).
- [22] M. Peskin and D. Schröder, *An introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books (1995).
- [23] L. Fermi, *Atoms in the Family*, University of Chicago Press, Chicago, 1954. L. Lamont, *Day of Trinity*, Atheneum, New York, 1965. R. Moore, *Niels Bohr*, A.A. Knopf, New York, 1966. V.F. Weisskopf, *Physics in the Twentieth Century: Selected Essays*, MIT Press, Cambridge, 1972. G. Gamow, *My World Line*, Viking, New York, 1970. E. Segre, *Enrico Fermi, Physicist*, University of Chicago Press, Chicago, 1970. M. Oliphant, *Rutherford Recollections of the Cambridge Days*, Elsevier, Amsterdam, 1972. W. Heisenberg, *Physics and Beyond; Encounters and Conversations*, Allen and Unwin, London, 1971. R. Jungk, *The Big Machine*, Scribner, New York, 1968. P.C.W. Davies, *The Forces of Nature*, Cambridge University Press, Cambridge, 1979. E. Segre, *From X Rays to Quarks*, Freeman, San Francisco, 1980. Y. Nambu, *Quarks*, World Sci., Singapore, 1981. P. Davies, *Superforce*, Simon & Schuster, New York, 1984. F. Close, *The Cosmic Onion*, American Institute of Physics, New York, 1983. R.P. Feynman, *Quantum Electrodynamics*, Princeton University Press, Princeton, 1985. H.R. Pagels, *Perfect Symmetry*, Simon & Schuster, New York, 1983. A. Zee, *Fearful Symmetry*, MacMillan Publishing Co., New York, 1986. R.E. Peierls, *Atomic Histories*, American Institute of Physics, New York, 1997. F. Close, *Lucifers Legacy*, Oxford University Press, Oxford, 2000. F. Close, M. Marten, and C. Sutton, *A Journey to the Heart of Matter*, Oxford University Press, Oxford, 2002. K.S. Thorne, *Black Holes and Time Warps: Einsteins outrageous legacy*, W.W. Norton, New York, 1994. Eduard Punset, *Cara a cara con la vida, la mente y el Universo*, Ediciones Destino, Barcelona (2007).