

Universidad Nacional de La Plata  
Facultad de Ciencias Exactas  
Departamento de Física

TESIS DOCTORAL

Aplicaciones de Funciones Espectrales  
en Teoría Cuántica de Campos

Carlota Gabriela Beneventano

2000

Lugar de trabajo

Departamento de Física

Directora de Tesis

Eve Mariel Santangelo

## Agradecimientos

A Mariel, por sus invalorable contribuciones y enseñanzas.

A Horacio, Marcelo y Quique, por sus valiosas sugerencias y discusiones.

A mi familia.

La presente tesis ha sido realizada durante el desempeño de una Beca FOMEC-UNLP y una Beca para completar Doctorado de la Fundación Antorchas.



---

# CONTENTS

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Operadores diferenciales elípticos en variedades sin borde . . . . .	2
1.2	Sistemas elípticos de borde . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Energías de Casimir - Métodos de regularización</b>	<b>13</b>
2.1	Generalidades . . . . .	13
2.2	Conexión entre regularizaciones $\zeta$ y cutoff [11] . . . . .	14
2.3	Ejemplos de aplicación . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Campos de Dirac en presencia de una cuerda de flujo</b>	<b>27</b>
3.1	Generalidades sobre extensiones autoadjuntas de operadores diferenciales . . . . .	27
3.2	Efecto Aharonov-Bohm para campos de Dirac sin masa . . . . .	29
3.3	Condiciones APS y extensiones autoadjuntas [45, 46] . . . . .	32
3.4	Efectos de polarización de vacío en una región acotada . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Fermiones masivos bajo condiciones MIT en un background de Aharonov-Bohm [53]</b>	<b>41</b>
4.1	Generalidades . . . . .	41
4.2	Cálculo de la energía de Casimir . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Acción efectiva para la Electrodinámica Cuántica</b>	<b>55</b>
5.1	Cálculo de acciones efectivas mediante la función $\zeta$ . . . . .	55
5.2	Acción efectiva para campos electromagnéticos constantes [63] . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Resumen de los resultados</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Sumas de Poisson</b>	<b>69</b>

---

<b>B</b>	<b>Teorema del Índice de Atiyah-Patodi-Singer</b>	<b>73</b>
<b>C</b>	<b>Coeficientes <math>b_{(i,j)}</math></b>	<b>77</b>
<b>D</b>	<b>Funciones <math>f(s; a, b; x)</math></b>	<b>79</b>
<b>E</b>	<b>Evaluación de <math>A_{-1}</math> y <math>A_0</math></b>	<b>83</b>
<b>F</b>	<b>Cálculo detallado de <math>CF_2^2</math></b>	<b>85</b>

---

---

# CHAPTER 1

---

## Introducción

En Teoría Cuántica de Campos bajo la influencia de condiciones externas, el cálculo de ciertas magnitudes físicas (tales como, por ejemplo, la acción efectiva, la energía de Casimir, el número fermiónico, etcétera), conduce a la consideración de funciones espectrales asociadas con operadores diferenciales. Éstas están relacionadas con secuencias de autovalores de operadores. Por condiciones externas se entienden a aquellas que están dadas explícitamente como función del espacio y del tiempo; ejemplos típicos de éstas son las condiciones de contorno que deben satisfacer los campos cuantizados sobre la frontera de una dada región del espacio tiempo, o su interacción con campos de background externos (no autointeractuantes) que aparecen en la ecuación de movimiento de los campos cuantizados.

A partir del trabajo de Casimir [1] ha habido cada vez más evidencia de la importancia de tales condiciones externas sobre la estructura del vacío de sistemas cuánticos. Por ejemplo, la energía de Casimir puede ser pensada como debida a la distorsión del vacío causada por la presencia de bordes o por campos externos de background. Uno de los métodos para calcular energías de Casimir es el de suma de modos, que implica encontrar un conjunto completo de autofunciones (y sus correspondientes autovalores) del Hamiltoniano clásico del campo y sumar sobre los autovalores. Distintas técnicas de regularización son entonces usadas para dar sentido a estas sumas formalmente divergentes (ver, por ejemplo, [2, 3] y referencias que se citan allí).

Otro ejemplo de aplicación de funciones espectrales lo provee el cálculo de acciones efectivas al orden de un loop. En el marco de la integral funcional, tales correcciones cuánticas están relacionadas con la evaluación de determinantes funcionales de operadores diferenciales, formalmente definidas como el producto de los autovalores de dichos operadores. Ya que los autovalores de los operadores diferenciales a considerar forman, por lo general, una secuencia no acotada, se hace necesaria, como en el caso anterior, la introducción de procedimientos de regularización (ver, por ejemplo [4] y referencias contenidas en ese trabajo).

Algunos de los métodos de regularización más frecuentemente usados están basa-

dos en el uso de funciones espectrales tales como la función  $\zeta$  y la traza del heat kernel.

Dado que estamos interesados en hacer uso de funciones espectrales de operadores diferenciales en variedades compactas con y sin bordes, resumiremos a continuación algunas generalidades sobre tales operadores [5, 6] y las condiciones en que pueden definirse funciones espectrales asociadas [5, 6, 7, 8].

## 1.1 Operadores diferenciales elípticos en variedades sin borde

Sea  $M$  una variedad compacta sin borde de dimensión  $n$  y  $E$  un fibrado vectorial complejo sobre  $M$ .

### Definición:

Un operador diferencial parcial de orden  $m$  sobre secciones de  $E$  puede escribirse, en coordenadas locales, como

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha,$$

$$\text{con } D_x^\alpha = \prod_{j=1}^n \left( -i \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{\alpha_j} \quad \text{y } |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j.$$

### Definición:

Se define el símbolo del operador como

$$\sigma(A) = \sigma(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

que corresponde al polinomio obtenido reemplazando formalmente  $D_x^\alpha$  por el monomio  $\xi^\alpha$ ; resulta así un polinomio de orden  $m$  en la variable dual  $\xi$ . (Consideraremos sistemas determinados, de modo que los  $a_\alpha$  son matrices cuadradas.)

### Definición:

El símbolo principal es la parte de mayor orden del símbolo. Se trata de un polinomio homogéneo de grado  $m$  en  $\xi$

$$\sigma_m(A) = \sigma_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

En términos del símbolo puede expresarse la acción del operador sobre funciones en su dominio como

$$Af(x) = \int e^{ix \cdot \xi} \sigma(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

### Definición:

El operador diferencial se dice *elíptico* si su símbolo principal es invertible para  $|\xi| = 1$ , es decir no tiene autovalores cero para  $|\xi| = 1$  (o equivalentemente  $\det \sigma_m(x, \xi) \neq 0$  para  $|\xi| = 1$ ).

**Definición:**

El rayo  $\mathcal{K} = \{arg(\lambda) = \theta\}$  en el plano complejo se llama un rayo de crecimiento mínimo de la resolvente si no existen autovalores del símbolo principal en ese rayo, es decir, si el problema

$$\sigma_m(x, \xi)u = \lambda u$$

tiene solución única (la trivial) para  $\lambda \in \mathcal{K}$ .

Potencias complejas de un operador diferencial

Si un operador diferencial  $A$  es *elíptico*, invertible, y tiene un rayo de crecimiento mínimo  $\mathcal{K}$ , puede definirse, para  $\Re(s) > 0$

$$A^{-s} = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} (A - \lambda)^{-1} d\lambda,$$

donde  $\Gamma$  es una curva que empieza en  $\infty$ , recorre el rayo de mínimo crecimiento hasta un pequeño círculo alrededor del origen, luego este círculo en el sentido de las agujas del reloj, y va de nuevo a  $\infty$  a lo largo del rayo. Para describir  $A^{-s}$ , se construye una parametriz para  $(A - \lambda)^{-1}$  [6]. Se tiene entonces:

$$\sigma(A^{-s}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} b_{-m-j}(x, \xi, \lambda) d\lambda,$$

donde los  $b_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$  son los coeficientes de Seeley, que quedan determinados por un conjunto de ecuaciones algebraicas.

La función  $\zeta$  del operador se define como

$$\zeta(A, s) = tr(A^{-s}).$$

Su estructura de polos y residuos queda determinada por las integrales sobre  $M$  de las trazas de los coeficientes de Seeley.

Relación con los autovalores - Función  $\zeta$

Supongamos que el fibrado tiene un producto interno hermítico, y la variedad  $M$  un elemento de volumen. Si, con respecto a estas estructuras  $A$  es normal ( $A^\dagger A = AA^\dagger$ ), entonces  $A$  tiene un conjunto ortonormal completo de autofunciones  $A \phi_k = \lambda_k \phi_k$ , y el núcleo  $K_{-s}(x, y)$  de su potencia  $-s$  puede escribirse:

$$K_{-s}(x, y) dv_y = \sum \lambda_k^{-s} \phi_k(x) \phi_k^\dagger(y) dv_y.$$

Tomando  $x = y$  e integrando sobre  $M$ , se obtiene:

$$\zeta(A, s) = \text{tr}(A^{-s}) = \sum \lambda_k^{-s}. \quad (1.1)$$

### Traza del heat-kernel

Si los autovalores  $\lambda$  del símbolo principal están limitados a la región  $S_0 : -\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg(\lambda) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ , entonces el espectro de  $A$  está en el sector  $S_\alpha : -\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg(\lambda + \alpha) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$  para algún  $\alpha > 0$ , y puede definirse

$$e^{-At} = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-\lambda t} (A - \lambda)^{-1} d\lambda, \quad t > 0 \quad (1.2)$$

con  $\Gamma$  el borde de  $S_\alpha$ . Puede mostrarse que  $e^{-At}$  es la solución fundamental de la ecuación de calor  $Au + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , con  $u(x, 0) = \delta(x)$ .

La aproximación de la resolvente mediante la parametriz permite, entonces, tomar el límite para  $t \rightarrow 0^+$  en la integral anterior, y obtener un desarrollo asintótico para  $e^{-At}$  en potencias crecientes (en general no enteras) de  $t$ , con coeficientes que vienen dados por los coeficientes de Seeley.

En términos de autofunciones y autovalores de  $A$ , el núcleo de  $e^{-At}$  puede escribirse como

$$K(t, x, y) = \sum_k e^{-\lambda_k t} \phi_k(x) \phi_k^\dagger(y).$$

Tomando  $x = y$ , e integrando sobre  $M$ , obtenemos

$$h(A, t) = \text{tr}(e^{-At}) = \sum_k e^{-\lambda_k t}. \quad (1.3)$$

Esta es la definición de la traza del heat-kernel, otra función espectral de gran aplicación en problemas de Física.

Existe una relación muy estrecha entre la función  $\zeta$  de un operador y la traza de su heat-kernel. En efecto, de (1.1) y (1.3)

$$\zeta(A, s) = \sum_k \lambda_k^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dz \sum_k e^{-\lambda_k z} z^{s-1} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dz h(A, z) z^{s-1}. \quad (1.4)$$

Se ve entonces que la función  $\zeta$  y la traza del heat-kernel están relacionadas entre sí vía transformada de Mellin.

Veremos aplicaciones de estas funciones espectrales a problemas físicos en variedades sin borde en los capítulos 2 y 5.

Antes de dar las generalidades de operadores diferenciales elípticos en variedades con borde, aplicaremos, a modo de ejemplo, las definiciones dadas hasta ahora al problema sencillo del Laplaciano en una circunferencia de radio uno.

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + P,$$

donde  $P$  es el proyector sobre las constantes. Para este operador, en la circunferencia, se tiene  $m = 2$ ,  $n = 1$ .

Su símbolo principal está dado por

$$\sigma(A) = \xi^2 \neq 0 \quad \text{para } |\xi| = 1.$$

El operador es, por lo tanto elíptico.

De pedir que ningún autovalor del símbolo principal caiga sobre el rayo de crecimiento mínimo, es evidente que un rayo de crecimiento mínimo corresponde, por ejemplo, a  $\mathcal{K} = \{\lambda : \lambda \in \mathbf{R}^-\}$ .

Resolviendo el problema de autovalores del operador, se encuentra

$$\begin{aligned} \zeta(A, s) &= 1 + 2\zeta_R(2s), \\ h(A, t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} + e^{-t} = \Theta(0; \frac{t}{\pi}) - 1 + e^{-t}, \end{aligned}$$

donde  $\zeta_R$  es la función  $\zeta$  de Riemann y  $\Theta$  es la función  $\Theta$  de Jacobi [9].

Hay que señalar que si el operador es simétrico (formalmente autoadjunto) sobre una variedad compacta Riemanniana, los autovalores son reales y pueden ordenarse ( $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ ), y entonces existe  $C > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} n |\lambda_n|^{-\frac{m}{n}} = C$ . Si, además, el operador tiene un símbolo principal definido positivo para  $\xi \neq 0$ , el espectro está acotado por debajo, habiendo, a lo sumo, un número finito de autovalores negativos.

## 1.2 Sistemas elípticos de borde

Suponemos ahora que  $M$  es una variedad compacta de dimensión  $n$ , con borde  $\partial M$ .

Llamamos, en cada sistema local de coordenadas  $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$  a las coordenadas sobre  $\partial M$ , y por  $t$  (real) denotamos la variable normal interior al borde, de modo que  $(x, t)$  está en  $\mathbf{R}^n$ . Anotamos con  $\mathbf{R}_+^n$  el semiespacio correspondiente a  $t \geq 0$ . Consideramos, en  $\mathbf{R}_+^n$ , un operador diferencial (matriz de  $q \times q$ ) de orden  $m$ :

$$A = \sum_{j=0}^m A_j(t) D_t^{m-j}, \quad (D_t = -i \frac{\partial}{\partial t}),$$

donde  $A_j$  es un operador diferencial de orden  $\leq j$  en  $\mathbf{R}^{n-1}$ .

Entonces, llamando  $(\xi, \tau)$  a la variable simbólica correspondiente a  $(x, t)$ , tenemos, para el símbolo de  $A$ :

$$\sigma(A) = \sum_j \sigma(A_j)(x, t, \xi) \tau^{m-j};$$

su símbolo principal es

$$\sigma_m = \sum_j \sigma_j(A_j)(x, t, \xi) \tau^{m-j}.$$

Definimos, además, el polinomio característico o símbolo principal parcial:

$$\sigma_m' = \sum_j \sigma_j(A_j)(x, 0, \xi) D_t^{m-j}.$$

Supongamos que, en la vecindad del borde, tenemos dados operadores

$$B_j = \sum_{k=1}^m B_{jk} D_t^{m-k}, \quad 1 \leq j \leq \frac{mq}{2}$$

y los  $B_{jk}$  son un sistema de operadores diferenciales, matrices de  $1 \times q$ , actuando en  $\mathbf{R}^{n-1}$ . Supondremos, en particular (ya que éste será el caso en las aplicaciones físicas que tomaremos), que son de orden 0, es decir, multiplicativos.

Como antes, escribimos:

$$\sigma(B_j) = \sum_{k=1}^m \sigma(B_{jk}) \tau^{m-k},$$

$$\sigma'(B_j) = \sum_{k=1}^m \sigma(B_{jk}) D_t^{m-k}.$$

**Definición:**

La colección de operadores  $A, B_1, \dots, B_{\frac{mq}{2}}$  constituye un sistema elíptico de borde si  $A$  es elíptico y, para  $g = (g_1, \dots, g_{\frac{mq}{2}})$  arbitrario,  $x$  en  $\mathbf{R}^{n-1}$  y  $\xi \neq 0$  en  $\mathbf{R}^{n-1}$  hay una única solución del siguiente problema de borde sobre la semirrecta  $\{t > 0\}$ :

$$\sigma_m'(A)(x, \xi, D_t)u = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$$

$$\sigma'(B_j)(x, \xi, D_t)u = g_j \quad \text{en } t = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, \frac{mq}{2}.$$

Esta condición es también conocida como condición de elipticidad débil, o de Lopatinski-Shapiro [5].

**Definición:**

La colección  $A, B_1, \dots, B_{\frac{mq}{2}}$  constituye un sistema fuertemente elíptico de borde en un cono  $\mathcal{K} \subset \mathbf{C}$  que incluye el cero si,

i) Para  $\xi \neq 0$   $\sigma_m(A)(x, \xi)$  no tiene autovalores en  $\mathcal{K}$  y

ii) Existe, para cada  $x$  y cada  $(\xi, \lambda) \neq 0$ , con  $\lambda \in \mathcal{K}$ , solución única del problema de borde:

$$\sigma_m'(A)(x, \xi, D_t)u = \lambda u$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$$

$$\sigma'(B_j)(x, \xi, D_t)u = g_j \quad \text{en } t = 0, j = 1, \dots, \frac{mq}{2}$$

Esta condición suele llamarse condición de existencia de un cono Agmon [10]. Obsérvese que la elipticidad fuerte se reduce a la elipticidad de Lopatinski-Shapiro cuando  $\mathcal{K} = \{0\}$ .

Si se satisface la condición débil, puede definirse un operador  $A_B$  sobre  $L^2(M)$ , definido como el operador  $A$  actuando sobre todas las funciones  $u$  que satisfacen  $B_j u = 0$  en  $\partial M$ .

Si, además, se cumple la elipticidad fuerte, puede encontrarse [7] un desarrollo para la resolvente  $(A_B - \lambda)^{-1}$  y definir, a partir de ella,

$$(A_B)^{-s} = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} (A_B - \lambda)^{-1} d\lambda,$$

con  $\Gamma$  una curva apropiada que yace en el cono donde se sabe que existe  $(A_B - \lambda)^{-1}$ .

Nuevamente, puede en este caso definirse la función  $\zeta$  como la traza de  $(A_B)^{-s}$ . Pero ahora, el desarrollo de la resolvente involucra, además de los coeficientes de Seeley ya introducidos en el caso sin borde, nuevos coeficientes  $d$  que ajustan las condiciones de contorno, y que deben determinarse no ya a partir de ecuaciones algebraicas, sino a través de la resolución de ecuaciones diferenciales.

Podemos construir la solución fundamental de la ecuación de calor para  $A$  si el espectro de su símbolo principal  $\sigma_m$  está contenido en el cono

$$\mathcal{K}_C = \{\lambda : |\Im(\lambda)| \leq C \Re(\lambda)\}$$

alrededor de  $\mathbf{R}^+$ , para algún  $C \geq 0$ , y si el problema de borde es fuertemente elíptico con respecto al cono complementario  $\{0\} \cup \mathcal{K}_C^c$ ; en estas condiciones es posible además tomar la traza del heat-kernel.

Si  $A_B$  tiene un conjunto completo de autovectores, ambas funciones espectrales pueden expresarse en términos de los autovalores:

$$\zeta(A, s) = \sum_k (\lambda_k)^{-s}, \quad (1.5)$$

$$h(A_B, t) = \sum_k e^{-\lambda_k t}, \quad (1.6)$$

y, como en el caso sin borde, están relacionadas entre sí via transformada de Mellin.

Tomemos, como ejemplo, el Hamiltoniano de Dirac en un círculo de radio 1. Como veremos más adelante, el Hamiltoniano de Dirac de  $2 \times 2$  ( $2+1$ -dimensiones) puede escribirse, en coordenadas polares, en la forma

$$H = \begin{pmatrix} M & i e^{-i\theta} (\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\theta) \\ i e^{i\theta} (\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\theta) & -M \end{pmatrix},$$

donde  $M$  es la masa del campo de Dirac.

En este caso  $m = 1$ ,  $n = 2$ , la variedad  $M$  es el interior del círculo y su borde  $\partial M$  corresponde a  $r = 1$ .

Por lo tanto  $x = \theta$ ,  $t = 1 - r$ .

$H$  actúa sobre spinores de la forma  $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ , de modo que  $q = 2$ , y  $\frac{mq}{2} = 1$ .

El símbolo principal resulta

$$\sigma_1(H) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-ix}(\tau + \frac{i\xi}{1-t}) \\ e^{ix}(\tau - \frac{i\xi}{1-t}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Para mostrar la elipticidad de  $H$ , estudiamos el  $\det(\sigma_1(H)) = -(\tau^2 + (\frac{\xi}{1-t})^2)$ , que resulta  $\neq 0 \forall \xi : |\xi| = 1$ .

Para encontrar el rayo de mínimo crecimiento, consideramos el problema de autovalores:

$$\sigma_1(H) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Para que este problema tenga como única solución la trivial, debe satisfacerse

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & e^{-ix}(\tau + \frac{i\xi}{1-t}) \\ e^{ix}(\tau - \frac{i\xi}{1-t}) & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (\tau^2 + \frac{\xi^2}{(1-t)^2}) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{K}.$$

Así, es evidente que  $\mathcal{K}$  es cualquier rayo en  $\mathbf{C} - \mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-$ .

Consideramos ahora el operador correspondiente a las condiciones de contorno tipo bolsa de MIT, de utilidad en modelos efectivos de confinamiento, y a las cuales volveremos en el capítulo 4

$$\begin{aligned} B &= (1, i e^{-i\theta}) \\ \sigma'(B)(x, \xi, D_t) &= (1, i e^{-ix}) \\ \sigma'_1(H)(x, \xi, D_t) &= \begin{pmatrix} 0 & e^{-ix}(D_t + i\xi) \\ e^{ix}(D_t - i\xi) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El problema  $H_B$  es débilmente elíptico si  $H$  es elíptico, y si para  $g$  arbitraria,  $x \in \mathbf{R}$  y  $\xi \neq 0$  en  $\mathbf{R}$ , hay solución única para  $t > 0$  de

$$\sigma'_1(H)(x, \xi, D_t)u = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$$

$$\sigma'(B)(x, \xi, D_t)u = g \quad \text{en } t = 0.$$

Si escribimos

$$u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix},$$

la ecuación diferencial tiene soluciones de la forma  $\varphi(x, \xi, t) = A(x, \xi)e^{-\xi t}$ ,  $\chi(x, \xi, t) = B(x, \xi)e^{\xi t}$ ; la imposición sobre el comportamiento de  $u$  para  $t \rightarrow \infty$ , deja

$$u = \begin{pmatrix} A(x, \xi)e^{-\xi t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{para } \xi > 0$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ B(x, \xi)e^{\xi t} \end{pmatrix} \quad \text{para } \xi < 0.$$

Por último, la condición  $\sigma'(B)(x, \xi, D_t)u = g$ , permite determinar  $A(x, \xi)$  y  $B(x, \xi)$  en términos de  $g$  para  $\xi > 0$  y  $\xi < 0$  respectivamente; por lo tanto la solución  $u$  es única, y el problema es débilmente elíptico.

Para estudiar la existencia de un cono Agmon, se debe analizar el problema

$$\det(\sigma_1(H) - \lambda) \neq 0,$$

(condición satisfecha si  $\lambda \in \mathbf{C} - \mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-$ ), y pedir que exista solución única del problema

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{-ix}(D_t + i\xi) \\ e^{ix}(D_t - i\xi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

con las condiciones  $\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \rightarrow_{t \rightarrow \infty} 0$

$$\sigma'(B)(x, \xi, D_t) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \varphi + i e^{-ix} \chi = g \quad \text{en } t = 0.$$

La ecuación (1.7) se reduce a  $-\partial_t^2 \varphi = (\lambda^2 - \xi^2)\varphi$ ,  $\chi = \frac{1}{\lambda} e^{ix} (-i\partial_t - i\xi)\varphi$ , cuya solución es

$$\varphi = A(x, \xi)e^{\mu t} + B(x, \xi)e^{-\mu t}, \quad \text{donde } \mu = (\xi^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}},$$

donde tomamos la rama de la raíz cuadrada con  $\Re(\mu) > 0$  (esto es siempre posible si  $\lambda$  no es real).

El requisito  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$  deja

$$\varphi = B(x, \xi)e^{-\mu t}$$

$$\xi = \frac{B(x, \xi)}{\lambda} e^{ix} (i\mu - i\xi)e^{-\mu t}$$

Si les imponemos la condición de contorno

$$B(x, \xi) \left(1 - \frac{\mu - \xi}{\lambda}\right) = g,$$

el problema tiene solución única  $\forall g$ , salvo para  $\lambda = \sqrt{\xi^2 - \lambda^2} - \xi$  (cuyas únicas soluciones son  $\lambda = 0$  o  $\lambda = -\xi$ ).

Por lo tanto el problema  $H_B$  es fuertemente elíptico en  $\mathcal{K} = \mathbf{C} - \mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-$ .

Como otro ejemplo, que será de utilidad en el Capítulo 3, consideramos ahora el operador

$$H = \begin{pmatrix} M & \partial_r - \frac{i}{r}\partial_\theta - \frac{\kappa}{r} \\ -\partial_r - \frac{i}{r}\partial_\theta - \frac{\kappa}{r} & -M \end{pmatrix}.$$

El símbolo principal de este operador es:

$$\sigma_1(H) = \begin{pmatrix} 0 & -i\tau + \frac{\xi - \kappa}{1-t} \\ i\tau + \frac{\xi - \kappa}{1-t} & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificamos primero la elipticidad de  $H$ :

$$\det(\sigma_1(H) - \lambda) = \lambda^2 - (\tau^2 + (\frac{\xi - \kappa}{1-t})^2) = 0$$

implica

$$\lambda^2 = \tau^2 + (\frac{\xi - \kappa}{r})^2 \quad \xi \neq 0.$$

Por lo tanto,  $H$  es elíptico en  $\mathcal{K} = \mathbf{C} - \mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-$ .

Imponemos ahora condiciones de contorno APS, las cuales están definidas dando el símbolo parcial del operador de borde:

$$\sigma'(B) = (\Theta_0(\xi - \kappa), \Theta(\kappa - \xi)), \quad \text{donde } \Theta_0(\xi - \kappa) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi - \kappa \geq 0 \\ 0 & \text{si } \xi - \kappa < 0 \end{cases}$$

El símbolo principal parcial del operador  $H$  es:

$$\sigma'_1(H) = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_t + \xi - \kappa \\ \partial_t + \xi - \kappa & 0 \end{pmatrix}.$$

Al resolver su problema de autovalores (para  $\lambda \neq 0$ ) se encuentra

$$\chi = \frac{1}{\lambda}(\partial_t + \xi - \kappa)\varphi,$$

$$(-\partial_t^2 + (\xi - \kappa)^2)\varphi = \lambda^2\varphi.$$

Llamando  $\mu = ((\xi - \kappa)^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$  con  $\Re(\mu) > 0$  (lo cual es siempre posible si  $\lambda$  no es real, se tiene

$$\varphi = A(\xi)e^{\mu t} + B(\xi)e^{-\mu t}$$

Las autofunciones que se anulan para  $t \rightarrow \infty$ , tienen la forma

$$\begin{pmatrix} B(\xi)e^{-\mu t} \\ \frac{B(\xi)}{\lambda}(\xi - \kappa - \mu)e^{-\mu t} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el problema de borde

$$(\Theta_0(\xi - \kappa), \Theta(\kappa - \xi)) \begin{pmatrix} B(\xi) \\ \frac{B(\xi)}{\lambda}(\xi - \kappa - \mu) \end{pmatrix} = f(\xi)$$

siempre tiene solución única, dada por

$$B(\xi) = f(\xi), \quad \xi \geq \kappa$$

$$B(\xi) = \frac{\lambda}{\xi - \kappa - \mu} f(\xi), \quad \xi < \kappa.$$

Para  $\lambda = 0$  ( $\xi \neq 0$ )

$$\varphi = A(\xi)e^{-(\xi-\kappa)t}$$

$$\chi = B(\xi)e^{(\xi-\kappa)t}.$$

Las soluciones que se anulan para  $t \rightarrow \infty$  son

$$\begin{pmatrix} A(\xi)e^{-(\xi-\kappa)t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{si } \xi > \kappa$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ B(\xi)e^{(\xi-\kappa)t} \end{pmatrix}, \quad \text{si } \xi < \kappa$$

y el problema de borde en  $t = 0$  tiene solución única

$$A(\xi) = f(\xi) \quad \text{si } \xi > \kappa$$

$$B(\xi) = f(\xi) \quad \text{si } \xi < \kappa.$$

Por lo tanto, las condiciones APS definen un problema fuertemente elíptico para el operador  $H$  en  $\mathcal{K} = \mathbf{C} - \mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-$ .



---

---

## CHAPTER 2

---

# Energías de Casimir - Métodos de regularización

### 2.1 Generalidades

Uno de los aspectos fundamentales de la Teoría Cuántica de Campos es la tarea de extraer resultados físicamente significativos a partir de cantidades que, en principio están mal definidas. Tal vez el ejemplo más simple de esto sea la energía de punto cero de campos cuánticos.

La aparición de una energía de vacío divergente es una consecuencia directa del método de cuantificación canónico, que permite establecer la correspondencia entre cantidades clásicas y operadores cuánticos; este esquema no fija el orden de los operadores no conmutantes en el Hamiltoniano del campo, lo que hace necesario imponer prescripciones adicionales para tener una teoría de campos bien definida.

Al estudiar teorías de campos libres extendidas a todo el espacio tiempo, esta ambigüedad es removida mediante la prescripción de orden normal. Esto implica la substracción formal de la energía infinita de punto cero y, por lo tanto, el valor de expectativa de vacío del Hamiltoniano normalmente ordenado es cero. Tal substracción está justificada por el hecho de que, en la práctica no es posible medir un valor absoluto de energía, sino sólo diferencias, permitiendo una elección arbitraria del origen sobre la escala de energía.

En 1948, Casimir mostró [1] que placas neutras, perfectamente conductoras, puestas en el vacío, se atraen una a otra. Esta fuerza atractiva puede ser considerada como la consecuencia del cambio de energía de punto cero cuando las placas son llevadas a su posición. La existencia del efecto Casimir implica que la energía del estado de vacío de los campos cuantizados no puede ser correctamente definida mediante la sola prescripción de orden normal. La idea básica detrás del concepto de Casimir es que los campos cuánticos siempre existen en presencia de vínculos externos o en interacción

con otros campos, y, por lo tanto, su energía de punto cero se ve modificada. Tales vínculos podrían ser idealizados como condiciones de contorno impuestas sobre los campos en la frontera de un volumen espacial finito.

Uno de los procedimientos [2] usados para calcular energías de Casimir es la evaluación directa de sumas infinitas sobre los modos de punto cero del campo (autovalores del Hamiltoniano). Estas sumas son formalmente divergentes, y un esquema de regularización adecuado debe emplearse para extraer un resultado físicamente significativo [2, 3]. Aunque existen diferencias entre los resultados obtenidos por distintos métodos de regularización, las predicciones para la energía de Casimir deben ser independientes de los métodos utilizados. Resulta, entonces, crucial comprender la relación entre los resultados obtenidos mediante distintas técnicas de regularización.

## 2.2 Conexión entre regularizaciones $\zeta$ y cutoff [11]

Un paso hacia el entendimiento de la relación entre las regularizaciones de la energía de Casimir con la función  $\zeta$  y con cutoff exponencial fue realizado en [12, 13]. En particular, en [13], los autores mostraron la conexión entre regularización exponencial y regularización con la función  $\zeta$ , con la condición ad-hoc de que la energía regularizada mediante cutoff presente sólo divergencias en forma de polos. En este caso, mostraron que la energía regularizada a la zeta resulta finita, e idéntica a la energía regularizada vía cutoff, con los términos polares substraídos.

Vamos ahora a extender la conexión entre ambos métodos, y sólo restringiremos el problema de borde asociado de tal forma de garantizar que los autovalores del campo sean reales.

La evaluación de energías de Casimir mediante el método de suma de modos implica la suma directa sobre los autovalores de energía de los modos de campo de punto cero [2, 3],

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n \quad . \quad (2.1)$$

Estos autovalores de energía,  $\omega_n$ , dependen de la dimensión del espacio-tiempo, del spin del campo considerado y de las condiciones de contorno impuestas sobre él.

Consideraremos el caso de un campo escalar libre en un espacio-tiempo  $d + 1$  dimensional que da lugar a una variedad

$$\mathcal{M}^{(d+1)} = R \times M \quad , \quad (2.2)$$

donde  $M$  es una variedad compacta  $d$ -dimensional con borde suave  $\partial M$ .

Los autovalores de energía, luego de separar variables, resultan

$$\omega_n = \lambda_n^{1/2} \quad , \quad (2.3)$$

donde los  $\lambda_n$  satisfacen [3] el problema de borde asociado

$$D_B \varphi_n = \begin{cases} D\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \\ BT\varphi_n = 0 \end{cases} \quad . \quad (2.4)$$

En nuestro caso,  $D$  es un operador de segundo orden sobre  $M$ ;  $B$  es un operador tangencial (al cual tomaremos diferencial), que define las condiciones de contorno y  $T$  es el mapeo de restricción, que asigna a cada sección su dato de Cauchy en  $\partial M$ .

En lo que sigue, el problema de borde (2.4) será citado como  $(D, B)$ . Es claro que, para que las  $\omega_n$  tengan sentido como energías físicas, los autovalores  $\lambda_n$  deben ser reales y positivos; esto se puede lograr imponiendo las bien conocidas condiciones [5, 8] al problema de borde  $(D, B)$ . Como veremos a continuación, tales condiciones también implican que  $\omega_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty$  y que ellas son de orden  $O(n^{1/d})$  para  $n$  grande.

La suma (2.1) es claramente divergente y, por lo tanto, se le debe aplicar algún esquema de regularización para poder asignarle un significado físico. Trabajaremos con dos de estos métodos: la regularización cutoff exponencial y la regularización  $\zeta$  [4, 14]. Determinaremos el comportamiento de la energía de Casimir regularizada de ambas formas, y daremos una relación precisa entre partes finitas y divergentes que aparecen en uno y otro esquema, generalizando así el resultado de la referencia [13].

En el primer caso, se define,

$$E_{\text{exp}} \equiv \left. \frac{\mu}{2} \sum_n \frac{\lambda_n^{1/2}}{\mu} e^{-t \frac{\lambda_n^{1/2}}{\mu}} \right|_{t=0} = -\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \left( h \left( t, \frac{D_B}{\mu^2} \right) \right) \Big|_{t=0}, \quad (2.5)$$

donde

$$h \left( t, \frac{D_B}{\mu^2} \right) = \sum_n e^{-t \frac{\lambda_n^{1/2}}{\mu}} = \text{Tr} \left( e^{-\frac{t}{\mu} D_B^{1/2}} \right). \quad (2.6)$$

$\mu$  es un parámetro con dimensiones de masa, introducido para dejar  $t$  adimensional.

La energía de Casimir, mediante regularización de función  $\zeta$  [4, 14], está definida como

$$\begin{aligned} E_\zeta &\equiv \left. \frac{\mu}{2} \sum_n \left( \frac{\lambda_n}{\mu^2} \right)^{-\frac{s}{2}} \right|_{s=-1} = \frac{\mu}{2} \zeta \left( \frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2} \right) \Big|_{s=-1} \\ &= \frac{\mu}{2} \text{Tr} \left( \frac{D_B}{\mu^2} \right)^{-\frac{s}{2}} \Big|_{s=-1}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Es fácil ver, a partir del comportamiento de los  $\lambda_n$ , que la suma en (2.7) es convergente para  $\Re(s)$  suficientemente grande;  $\zeta \left( \frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2} \right)$  es, por lo tanto, holomorfa en la misma región. Ella puede ser extendida como una función meromorfa a todo el plano  $s$ , presentando sólo polos simples. Se define entonces la energía regularizada mediante función  $\zeta$  como el valor de esta extensión en  $s = -1$ . Nuevamente se ha introducido un parámetro  $\mu$  para permitir que la  $\zeta$  sea adimensional [15].

Antes de iniciar la demostración de la relación existente entre los resultados obtenidos mediante uno y otro método de regularización, vamos a reproducir algunas propiedades relativas a problemas de borde elípticos.

### Lema 1

Sea  $M$  una variedad compacta suave  $d$ -dimensional, con borde suave  $\partial M$ . Sea  $D$  un operador diferencial parcial elíptico, y sea  $B$  un operador diferencial tangencial sobre  $\partial M$ .

Si el problema de borde  $(D, B)$  es autoadjunto y elíptico con respecto a  $C - R_+$  (por lo tanto tiene un cono Agmon [10] que incluye el eje real negativo), entonces:

- a) Existe un sistema ortonormal completo;  $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  con  $D\phi_n = \lambda_n\phi_n$ .
- b)  $\phi_n$  satisfacen la condición de contorno  $BT\phi_n = 0$  (aquí,  $T$  es el mapeo de restricción, que asigna a cualquier sección suave su dato de Cauchy).
- c)  $\lambda_n \in R$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ . Si se ordenan los  $\lambda_n$  tal que  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ , entonces existe  $n_0$  tal que  $|\lambda_n| > n^{\frac{2}{d}}$  para  $n > n_0$ .
- d) Los  $\lambda_n$  están acotados por abajo y el espectro de  $D_B$  está contenido en  $[-C, \infty]$  para alguna constante  $C$ .

En lo que sigue, supondremos, sin pérdida de generalidad, que el espectro de  $D_B$  es positivo).

### Lema 2

Bajo las condiciones del lema anterior [8] :

- a)  $Y(t, D_B) = Tr(e^{-tD_B})$  es holomorfa en un sector

$$V_{\theta_0} = \{t = re^{i\theta}/r > 0, |\theta| < \theta_0\}$$

para algún  $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

- b)  $Y(t, D_B)$  posee la expansión asintótica  $Y(t, D_B) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{\frac{j-d}{2}}$ , para  $t \rightarrow 0$  uniformemente para  $t \in V_{\delta}$ , para cada  $\delta < \theta_0$ .

Aquí, los  $a_j$  pueden ser evaluados a partir de los coeficientes de Seeley [8], incluyendo tanto las contribuciones de volumen como las de borde.

- c)  $Y(t, D_B)$  decrece exponencialmente para  $|t| \rightarrow \infty$  en  $V_{\delta}$ .

### Lema 3

Bajo las mismas condiciones [5, 8, 16] :

- a)

$$\mu^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Tr\left((D_B)^{-\frac{s}{2}}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{s}{2}-1} Y(t, D_B) dt \quad (2.8)$$

es la transformada de Mellin de  $Y(t, D_B)$ . Es holomorfa para  $\Re(s) > d$  y se extiende a una función meromorfa, con una estructura de singularidades:

$$\mu^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) = \sum_{j=0}^N \frac{2a_j}{s+j-d} + r_N\left(\frac{s}{2}\right), \quad (2.9)$$

donde  $r_N\left(\frac{s}{2}\right)$  es holomorfa para  $\Re(s) > d - N - 1$ .

b) Para cada  $c_1, c_2$  real y cada  $\delta < \theta_0$ ,

$$\left| \mu^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) \right| \leq C(c_1, c_2, \delta) e^{-\delta|\Im \frac{s}{2}|}, \quad \left| \Im \frac{s}{2} \right| \geq 1, c_1 \leq \Re \frac{s}{2} \leq c_2. \quad (2.10)$$

Con todos estos elementos, estamos ahora en condiciones de probar el siguiente lema, el cual es la base del resultado principal de este capítulo:

#### Lema 4

Bajo las mismas hipótesis que antes:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{dh\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right)}{dt} &= \frac{dTr\left(e^{-\frac{t}{\mu} D_B^{1/2}}\right)}{dt} = \sum_n -\frac{\lambda_n^{1/2}}{\mu} e^{-t \frac{\lambda_n^{1/2}}{\mu}} \text{ posee la expansión asintótica} \\ \frac{dh\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right)}{dt} &= \sum_{k=0}^d (-k) \frac{1}{2\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} a_{d-k} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{-k-1} + \\ &\quad \sum_{k=1}^K (-k) \frac{1}{2\mu} \frac{\Gamma\left(-k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} 2a_{d+2k} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2k-1} + \\ &\quad \sum_{k=0}^K (2k+1) \frac{1}{2\mu} \frac{(-1)^k}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(k+1)} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2k} \left[ r_{d+2k+1} \left(-k - \frac{1}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. a_{d+2k+1} \left( \Psi(1) + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{k-l} \right) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=0}^{d+2k} \frac{2a_j}{j-d-2k-1} + 2a_{d+2k+1} \left( (2k+1) \ln\left(\frac{t}{2\mu}\right) - \frac{1}{2k+1} \right) \right] + \rho_K(t) \quad (2.11) \end{aligned}$$

donde  $\rho_K$  es de orden  $O\left(\left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2K+1+\varepsilon}\right)$ ,  $0 < \varepsilon < 1$  para  $t \rightarrow 0$ ,  $\in V_\delta$ .

#### Demostración

En primer lugar, nótese que

$$\Gamma(s) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) = \int_0^\infty t^{s-1} h\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right) dt \quad (2.12)$$

es la transformada de Mellin de  $h\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right)$ . Ahora,

$$\Gamma(s) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left[ \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) \right] =$$

$$\frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \left[ \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) \right]. \quad (2.13)$$

A partir del Lema 3 a), y la estructura de singularidades bien conocida de  $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ , se sigue que (2.13) es holomorfa para  $Res > d$ , y

$$h\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \left(\frac{t}{\mu}\right)^{-s} \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \left[ \mu^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) \right], \quad (2.14)$$

donde el camino de integración es tal que  $c > d$ .

Esta expresión puede ser derivada, para obtener  $\frac{dh}{dt}$

$$\frac{dh\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right)}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \frac{(-s)}{\mu} \left(\frac{t}{\mu}\right)^{-s-1} \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \left[ \mu^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) \right], \quad (2.15)$$

donde la integral debe realizarse sobre la curva mencionada anteriormente.

A partir del Lema 3 b), junto al hecho de que  $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$  es  $O\left(e^{(-\frac{\pi}{2}+\epsilon)|Im\frac{s}{2}|}\right)$ , para cualquier  $\epsilon > 0$ , es posible obtener una expansión asintótica para  $\frac{dh\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right)}{dt}$  cambiando el contorno de integración en (2.14) moviéndolo a través de los polos de  $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \left[ \mu^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) \right]$ . Dichos polos están localizados en  $s = d - j$ .

Para  $s = d - j = k \geq 0$  ( $j \leq d$ ) ellos son polos simples, y contribuyen a la integral de Cauchy con

$$\frac{-k}{2\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} a_{d-k} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{-k-1}, \quad k = 0, 1, \dots, d. \quad (2.16)$$

Para  $s = d - j = -2k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) ellos son también simples, y su contribución es

$$-k \frac{1}{2\mu} \frac{\Gamma\left(-k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} 2a_{d+2k} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Para  $s = d - j = -(2k + 1)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) ellos son polos simples y dobles, y contribuyen con :

$$\frac{(2k+1)}{2\mu} \frac{(-1)^k}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(k)} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2k} \left[ r_{d+2k+1} \left(-k - \frac{1}{2}\right) + \sum_{j=0}^{d+2k} \frac{2a_j}{j - d - 2k - 1} \right] \quad (2.18)$$

$$\frac{(2k+1)}{2\mu} \frac{(-1)^k}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(k+1)} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2k} a_{d+2k+1} \left[ 2 \ln\left(\frac{t}{2\mu}\right) - 2 + \Psi(1) + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{k-l} \right] \quad (2.19)$$

(Debe notarse que la suma en (2.19) debe ser incluida siempre que tenga sentido).

Por lo tanto, cambiando el contorno de integración en (2.14) hasta, e incluyendo a, la singularidad en  $s = -(2K + 1)$  tenemos,

$$\begin{aligned}
 \frac{dh\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right)}{dt} &= \sum_{k=0}^d (-k) \frac{1}{2\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} a_{d-k} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{-k-1} + \\
 &\quad \sum_{k=1}^K (-k) \frac{1}{2\mu} \frac{\Gamma\left(-k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} 2a_{d+2k} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2k-1} + \\
 &\quad \sum_{k=0}^K (2k+1) \frac{1}{2\mu} \frac{(-1)^k}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(k+1)} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2k} \left[ r_{d+2k+1} \left(-k - \frac{1}{2}\right) + \right. \\
 &\quad \left. a_{d+2k+1} \left( \Psi(1) + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{k-l} \right) + \sum_{j=0}^{d+2k} \frac{2a_j}{j-d-2k-1} + \right. \\
 &\quad \left. 2a_{d+2k+1} \left( (2k+1) \ln\left(\frac{t}{2\mu}\right) - \frac{1}{2k+1} \right) \right] + \rho_K(t). \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

El resto  $\rho_K(t)$  está dado por una integral tipo (2.15), pero con  $c < -2(K+1)$  el cual, como un resultado del Lema 3 b) y la estimación para  $|\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)|$  recién discutida, es  $O\left(\left|\frac{t}{2\mu}\right|^{2K+1+\varepsilon}\right)$ ; esto completa la demostración.

Cuando este desarrollo asintótico es evaluado en  $t = 0$ , da, para la energía de Casimir calculada mediante cutoff exponencial

$$\begin{aligned}
 E_{\text{exp}} &= -\frac{\mu}{2} \frac{dh\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right)}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d (-k) \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2^{-k} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} a_{d-k} \left(\frac{t}{\mu}\right)^{-k-1} \Big|_{t=0} - \\
 &\quad \frac{1}{4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[ r_{d+1} \left(-\frac{1}{2}\right) + a_{d+1} (\Psi(1) - 2) + 2 \sum_{j=0}^d \frac{a_j}{j-d-1} \right] + \frac{1}{2} \frac{a_{d+1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \ln\left(\frac{t}{2\mu}\right). \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

A partir de (2.9), la energía de Casimir regularizada mediante la función  $\zeta$ , (con  $N = d+1$ ), está dada por

$$\begin{aligned}
 E_{\zeta} &= \frac{\mu}{2} \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) \Big|_{s=-1} = \\
 &\quad \frac{1}{2\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} \sum_{j=0}^d \frac{2a_j}{j-d-1} + \frac{1}{2\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} r_{d+1} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\mu^{s+1}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{a_{d+1}}{s+1} \Big|_{s=-1} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{j=0}^d \frac{a_j}{j-d-1} - \frac{1}{4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} r_{d+1} \left(-\frac{1}{2}\right) + \\
& \left. \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} a_{d+1} \left(\frac{\Psi(1)}{2} + 1 - \ln(2\mu)\right) - \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{a_{d+1}}{s+1} \right]_{s=-1}. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

A partir de (2.21) y (2.22) se pueden extraer las siguientes conclusiones respecto a la energía de Casimir para campos escalares en un espacio tiempo  $d + 1$  dimensional:

1) Ambos métodos de regularización dan, en principio, lugar a contribuciones divergentes. Si el coeficiente  $a_{d+1}$  es nulo, la regularización zeta da un resultado finito, que coincide con la parte finita de la energía obtenida mediante cutoff exponencial. Además, este último método de regularización presenta polos de orden 2, 3, ...,  $d + 1$ , con el coeficiente del polo de orden  $k + 1$  igual a  $\Gamma(k + 1)$  por el residuo de  $\frac{\mu}{2}\zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D\mu}{\mu^2}\right)$  en  $s = k$  ( $k = 1, \dots, d$ ).

2) En el caso general, ( $a_{d+1} \neq 0$ ), la regularización exponencial muestra, aparte de las singularidades en forma de polo, una divergencia logarítmica, con un coeficiente que es igual a menos el residuo de  $\frac{\mu}{2}\zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D\mu}{\mu^2}\right)$  en  $s = -1$ . Como consecuencia de ésto, las partes finitas mínimas que aparecen en uno y otro esquema de regularización difieren en términos proporcionales a  $a_{d+1}$ . La diferencia entre la parte finita mínima obtenida a partir de regularización exponencial y la obtenida a partir de regularización  $\zeta$  está dada por

$$-\frac{1}{2} \frac{a_{d+1}}{\sqrt{\pi}} \Psi(1) = \frac{1}{2} \frac{a_{d+1}}{\sqrt{\pi}} \gamma, \quad (2.23)$$

donde  $\gamma$  es la constante de Euler-Mascheroni. En ambos esquemas de regularización aparece una dependencia logarítmica con la escala  $\mu$  (esto ya ha sido discutido en [15] en relación con la regularización  $\zeta$ ). Si la diferencia entre los resultados arrojados por ambas regularizaciones consiste en términos renormalizables, será posible dar una interpretación física a los resultados, eliminando al mismo tiempo la dependencia con  $\mu$ .

Hay que señalar que todos estos resultados siguen siendo válidos en el caso de una variedad  $M$  sin borde. En este caso, las condiciones de borde se reducen al requerimiento de que el operador  $D$  sea autoadjunto, con un símbolo principal definido positivo. Los coeficientes  $a_j$  sólo incluyen contribuciones de volumen, las cuales se anulan para  $j$  impar [5, 6].

### 2.3 Ejemplos de aplicación

Como un ejemplo simple, y para mostrar el acuerdo de los resultados con las conclusiones de la sección anterior, vamos ahora a estudiar en primer lugar la energía de Casimir para un campo escalar en una caja  $d$ -dimensional. Este problema ha sido ampliamente estudiado en [3], donde se hizo uso de la regularización dimensional, la cual es totalmente equivalente en este caso a la regularización  $\zeta$ . Estudiaremos los casos  $d = 1$  y  $d = 2$ .

Ya que el campo es escalar, satisface la ecuación de Klein Gordon

$$(\partial^2 + m^2) \varphi(x) = 0 \quad (2.24)$$

adentro de una caja  $d$ -dimensional de lados finitos de longitud  $L_1, L_2, \dots, L_d$  ( $d \geq 1$ ). Sobre cada dirección espacial imponemos condiciones periódicas de contorno (esto es equivalente a tener una variedad sin borde)

$$\varphi(t, L_i) = \varphi(t, 0) \quad , \quad i = 1, \dots, d. \quad (2.25)$$

Luego de aplicar separación de variables, fácilmente se obtiene que los modos del campo están dados por la raíz cuadrada de los autovalores del operador Laplaciano  $d$ -dimensional ( $D_{per}$ ).

$$\omega_{n_1 \dots n_d} = \left[ m^2 + \left( \frac{2n_1\pi}{L_1} \right)^2 + \dots + \left( \frac{2n_d\pi}{L_d} \right)^2 \right]^{1/2} \quad , \quad n_1, \dots, n_d \in Z. \quad (2.26)$$

(En el caso sin masa, el modo  $n_1 = \dots = n_d = 0$  debe ser excluído, ya que no contribuye a la energía de Casimir).

Usando la fórmula de inversión de Jacobi, se obtiene una extensión meromorfa para  $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_{per}}{\mu^2}\right)$ . La misma está dada por [3]

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_{per}}{\mu^2}\right) &= \frac{L_1 \dots L_d}{\pi^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{\mu}{2}\right)^d \left[ \left(\frac{m}{\mu}\right)^{-(s-d)} \Gamma\left(\frac{s-d}{2}\right) + \right. \\ &2 \left(\frac{\mu}{m}\right)^{\frac{s-d}{2}} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} \left. \left[ \left(\frac{n_1 L_1 \mu}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n_d L_d \mu}{2}\right)^2 \right]^{\frac{s-d}{4}} \times \right. \\ &\left. K_{\frac{d-s}{2}} \left( 2m \left( \left(\frac{n_1 L_1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n_d L_d}{2}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right] \quad , \quad (2.27) \end{aligned}$$

donde ' indica que el término con todos los  $n_i = 0$  debe ser omitido.

El último término en (2.27) es analítico en todo el plano  $s$ , y el primero tiene polos en  $s = d - 2k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ).

Comparando con (2.9) se ve entonces que en este caso  $a_j = 0$  para  $j$  impar, esto resulta consistente con el comentario realizado al final de la subsección previa. Con respecto a  $a_{2k}$ , es fácil ver que ellos están dados por

$$a_{j=2k} = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^d \frac{L_1 \dots L_d}{\pi^{\frac{d}{2}}} (m)^{2k} \quad , \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.28)$$

A este nivel, ciertas conclusiones generales pueden ser extraídas a partir de nuestros resultados previos:

- Si el espacio es de dimensión par, entonces  $a_{d+1} = 0$ ; la energía de Casimir calculada a partir de regularización  $\zeta$  será finita, mientras que la regularización exponencial mostrará polos. El resultado vía función  $\zeta$  - coincidirá entonces con la parte finita mínima de la energía vía cutoff exponencial.

- Por otro lado, si  $d$  es impar,  $a_{d+1} \neq 0$ . En este caso, ambas regularizaciones presentarán divergencias. Estas se presentarán como polos en  $s = -1$  en la versión regularizada a la  $\zeta$ , y una singularidad logarítmica tanto como polos en la exponencial. Las partes finitas mínimas diferirán por (2.23). Sin embargo, ya que los términos divergentes son proporcionales al volumen de la caja, ellos pueden ser abstraídos medi-

ante alguna prescripción físicamente significativa ( $E \rightarrow 0$ ) [3, 17]. Esta  $L_1 \dots L_d \rightarrow \infty$

misma prescripción deja resultados finitos, coincidentes e independientes de la escala  $\mu$ . Eso mismo se obtiene con una "renormalización" tipo Casimir [1], que equivale a considerar la contribución de los modos externos; ya que  $a_j$  contiene, en este ejemplo, sólo contribuciones de volumen, éstas se cancelarán al adicionar modos externos, como se mostró en [18]. Es en este sentido como se debe entender la equivalencia entre ambas regularizaciones en este ejemplo particular.

Es importante notar que, ya que todos los  $a_j$  ( $j \neq 0$ ) son proporcionales a potencias positivas de la masa, el caso sin masa es particular: en este caso, la función  $\zeta$  sólo presentará un polo en  $s = d$ , y la energía de Casimir regularizada a la  $\zeta$  resultará finita en cualquier dimensión, mientras que la regularización exponencial sólo mostrará un polo de orden  $d + 1$ ; ambas partes finitas mínimas coincidirán.

En el caso  $d = 1$ , usando las ecuaciones (2.22) y (2.27), se obtiene la energía de Casimir mediante regularización  $\zeta$  [3]

$$E_{\zeta}^{(1)} = -\frac{m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_1(nmL) + \frac{L\mu^2}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{\mu} \right)^{1-s} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \Bigg|_{s=-1}. \quad (2.29)$$

Como ya se discutió, ésta resulta divergente en  $s = -1$ .

Desarrollando el último término alrededor de  $s = -1$ , se obtiene

$$E_{\zeta}^{(1)} = -\frac{m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_1(nmL) + \frac{m^2 L}{4\pi} \left( \frac{1}{s+1} \Bigg|_{s=-1} - \ln\left(\frac{m}{2\mu}\right) - \frac{1}{2} \right). \quad (2.30)$$

Mediante regularización exponencial,

$$E_{\text{exp}}^{(1)} = -\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-t\left(\left(\frac{2n\pi}{L\mu}\right)^2 + \left(\frac{m}{\mu}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right) \Bigg|_{t=0}. \quad (2.31)$$

Esta serie puede ser evaluada usando la fórmula de suma de Poisson (como se detalla en el Apéndice A) y, calculando luego su derivada, se obtiene

$$E_{\text{exp}}^{(1)} = -\frac{m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_1(nmL) + \frac{m^2 L}{4\pi} \left( -\ln(t) - \ln\left(\frac{m}{2\mu}\right) + 2 \left(\frac{mt}{\mu}\right)^{-2} - \gamma - \frac{1}{2} \right) \Bigg|_{t=0}. \quad (2.32)$$

La comparación de los coeficientes (tanto de las partes divergentes como de las finitas) en las ecuaciones (2.30) y (2.32) muestra un total acuerdo con nuestros resultados

en la sección anterior. Una vez que se impone la prescripción  $E^{(1)} \rightarrow 0$  se ob-  
 $L \rightarrow \infty$

tiene, mediante ambos esquemas de regularización, el siguiente resultado físicamente significativo para la energía de Casimir

$$E_{Cas}^{(1)} = -\frac{m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_1(nmL) \quad (2.33)$$

La misma resulta ser finita, y decae exponencialmente con  $m$  y  $L$ . Tanto partes divergentes como finitas proporcionales a  $L$  han sido substraídas mediante la aplicación de la prescripción dada anteriormente, lo cual es equivalente a adicionar una constante a la densidad de energía.

Analizamos ahora el caso  $d = 2$ ; nuevamente, a partir de (2.22) y (2.27), se obtiene, para la energía de Casimir regularizada a la  $\zeta$  [3],

$$\begin{aligned} E_{\zeta}^{(2)} &= -\frac{L_1 L_2}{2^3 \pi^{\frac{3}{2}}} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \left( \sqrt{\left(\frac{n_1 L_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n_2 L_2}{2}\right)^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \times \\ &\quad K_{\frac{3}{2}} \left( 2m \sqrt{\left(\frac{n_1 L_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n_2 L_2}{2}\right)^2} \right) + \\ &\quad \frac{\mu^3}{2^3} \frac{L_1 L_2}{\pi} \left( \frac{m}{\mu} \right)^{-(s-2)} \frac{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \Big|_{s=-1} = \\ &= -\frac{L_1 L_2}{2^3 \pi^{\frac{3}{2}}} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \left\{ \left( \sqrt{\left(\frac{n_1 L_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n_2 L_2}{2}\right)^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \times \right. \\ &\quad \left. K_{\frac{3}{2}} \left( 2m \sqrt{\left(\frac{n_1 L_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n_2 L_2}{2}\right)^2} \right) \right\} - \frac{L_1 L_2 m^3}{12\pi}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Mediante regularización exponencial, la energía de Casimir está dada por

$$E_{\text{exp}}^{(2)} = -\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \left( \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{-t \left( \left(\frac{2n_1 \pi}{L_1 \mu}\right)^2 + \left(\frac{2n_2 \pi}{L_2 \mu}\right)^2 + \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \Big|_{t=0}. \quad (2.35)$$

Esta serie doble puede ser calculada haciendo uso repetido de la fórmula de suma de Poisson (como se prueba en el Apéndice A). Luego de derivar, obtenemos

$$\begin{aligned}
E_{\text{exp}}^{(2)} = & -\frac{L_1 L_2}{2^3 \pi^{\frac{3}{2}}} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \left( \sqrt{\left(\frac{n_1 L_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n_2 L_2}{2}\right)^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \times \\
& K_{\frac{3}{2}} \left( 2m \sqrt{\left(\frac{n_1 L_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n_2 L_2}{2}\right)^2} \right) - \\
& \left. \frac{L_1 L_2 m^3}{12\pi} + \frac{L_1 L_2 \mu^3}{2\pi t^3} \right]_{t=0}. \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Como se adelantó, la regularización  $\zeta$  da un resultado finito, que coincide con la parte finita mínima en la regularización exponencial. Esta última presenta un polo simple de orden  $d+1 = 3$ , cuyo coeficiente coincide con  $\Gamma(3)$  veces el residuo de  $E_{\zeta}^{(2)}$  en

$s = 2$ . Luego de aplicar la prescripción  $E^{(2)} \xrightarrow{L_1 L_2 \rightarrow \infty} 0$  se elimina la divergencia y una parte finita proporcional al volumen. La energía de Casimir es entonces

$$\begin{aligned}
E_{\text{Cas}}^{(2)} = & -\frac{L_1 L_2}{2^3 \pi^{\frac{3}{2}}} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \left( \sqrt{\left(\frac{n_1 L_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n_2 L_2}{2}\right)^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \times \\
& K_{\frac{3}{2}} \left( 2m \sqrt{\left(\frac{n_1 L_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n_2 L_2}{2}\right)^2} \right), \quad (2.37)
\end{aligned}$$

la cual, como en el caso  $d = 1$ , decae exponencialmente con el volumen de la caja y con la masa.

Un caso interesante [19, 20, 21], es el de un campo escalar sin masa en una esfera  $d$ -dimensional, bajo condiciones de borde Dirichlet.

En este caso, los modos propios del campo están relacionados con las raíces,  $\alpha_{l,s}$ , de las funciones de Bessel mediante [19, 20]

$$(\omega_{l,s})^2 = \left(\frac{\alpha_{l,s}}{R}\right)^2. \quad (2.38)$$

Si  $a_{d+1}$  denota el residuo de la  $\zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right)$  en  $s = -1$ , es claro que

$$a_{d+1} \sim \frac{1}{R}. \quad (2.39)$$

Esta dependencia puede ser verificada considerando evaluaciones explícitas de los coeficientes del heat-kernel para este caso [19, 20, 22].

Entonces, la energía de Casimir calculada vía función  $\zeta$ , tendrá una parte divergente proporcional a  $R^{-1}$ . La regularización exponencial presentará una divergencia logarítmica, también dependiendo de  $R^{-1}$ , tanto como polos de orden  $k + 1 = 2, 3, \dots, d + 1$ , proporcionales a  $\frac{\mu^{k+1} R^k}{t^{k+1}}$ .

Al ser las singularidades en forma de polo proporcionales a potencias positivas de  $R$ , una prescripción física (que se base en pedir que la energía se mantenga finita cuando el volumen va a infinito), las descartará. Pero la misma prescripción no eliminará la singularidad logarítmica en la regularización exponencial (o, equivalentemente, el polo en la función  $\zeta$ ). Más aún, quedará una dependencia con la escala, dando lugar a un término proporcional a  $\frac{1}{R} \ln(\mu R)$  (como se discutió en el caso  $d = 3$  en [15]).

Como se mencionó antes, otra posibilidad es sumar la contribución de los modos externos, y substraer la energía de Casimir de todo el espacio. En ese caso, las contribuciones de volumen a los  $a_j$  se cancelan, mientras que las contribuciones de superficie  $b_j$ , a los  $a_j$  satisfacen (ver, por ejemplo [18])

$$b_j(-\partial M) = (-1)^{j+1} b_j(\partial M). \quad (2.40)$$

Dado que el borde de la región exterior es el de la región interior con orientación invertida, esto muestra que las contribuciones debidas a los  $b_{d+1}$  sólo se cancelan para  $d$  impar. La energía de Casimir regularizada con función  $\zeta$  resultará divergente en cualquier dimensión par, esto parece estar relacionado con el resultado encontrado en [23]. En lo que respecta a la regularización exponencial, aparecerán divergencias logarítmicas para dimensión par e, independientemente de la dimensión, sólo se eliminarán las divergencias en forma de polos proporcionales a los coeficientes de Seeley de orden par.



---

---

## CHAPTER 3

---

# Campos de Dirac en presencia de una cuerda de flujo

### 3.1 Generalidades sobre extensiones autoadjuntas de operadores diferenciales

En Mecánica Cuántica o Teoría Cuántica de Campos, razonamientos físicos conducen a una expresión formal para el Hamiltoniano de un sistema, el cual es usualmente un operador diferencial parcial sobre un espacio apropiado  $L_2$  (de funciones de cuadrado integrable), pero cuyo dominio no está especificado.

Generalmente es fácil determinar un dominio sobre el cual el Hamiltoniano de un sistema está bien definido y resulta un operador simétrico  $H$ . Sin embargo, la hermiticidad de un operador no asegura que el mismo sea autoadjunto, y sólo este último tipo de operadores pueden dar la dinámica correcta de un sistema cuántico mediante su exponenciación para construir el operador evolución.

Surge así el problema de determinar la existencia de extensiones autoadjuntas de operadores simétricos. En el caso de haber varias extensiones, las mismas son distinguidas por la física del sistema en consideración. La respuesta a cuál es la correcta extensión autoadjunta del Hamiltoniano no surge entonces de la Matemática sino de la Física.

Por claridad y autoconsistencia, resumiremos brevemente algunas definiciones y teoremas que serán de gran utilidad para el desarrollo de las secciones siguientes [24, 25].

#### **Definición**

Sea  $T$  un operador lineal densamente definido sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Se define el operador  $T^\dagger$  (adjunto de  $T$ ) tal que su dominio  $D(T^\dagger)$  es el conjunto de las

$\varphi \in \mathcal{H}$  para las cuales hay un  $\eta \in \mathcal{H}$  con

$$(T\psi, \varphi) = (\psi, \eta) \quad \forall \psi \in D(T) \quad .$$

Para cada  $\varphi \in D(T^\dagger)$ , se define  $T^\dagger \varphi = \eta$ .

**Definición**

Un operador  $T$  densamente definido sobre un espacio de Hilbert se dice simétrico (o hermítico) si  $D(T) \subset D(T^\dagger)$  y además  $T\varphi = T^\dagger \varphi \quad \forall \varphi \in D(T)$ . Equivalentemente,  $T$  es simétrico *sii*

$$(T\varphi, \psi) = (\varphi, T\psi) \quad \forall \varphi, \psi \in D(T) \quad .$$

**Definición**

$T$  es autoadjunto si  $T = T^\dagger$ , es decir, *sii*  $T$  es simétrico y además  $D(T) = D(T^\dagger)$ .

Criterio básico para operadores autoadjuntos

**Teorema**

Sea  $T$  un operador simétrico sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes

- a)  $T$  es autoadjunto
- b)  $T$  es cerrado y  $\text{Ker}(T^\dagger \pm i) = \{0\}$
- c)  $\text{Ran}(T \pm i) = \mathcal{H}$

Ya que las dimensiones de los núcleos de  $\iota \pm T^\dagger$  tienen un papel tan importante, es conveniente asignarles nombres.

**Definición**

Sea  $T$  un operador simétrico, definimos

$$\mathcal{K}_+ = \text{Ker}(i - T^\dagger)$$

$$\mathcal{K}_- = \text{Ker}(i + T^\dagger)$$

$\mathcal{K}_+$ ,  $\mathcal{K}_-$  son llamados subespacios de deficiencia de  $T$ . Los números  $n_+(T) = \dim(\mathcal{K}_+)$ ,  $n_-(T) = \dim(\mathcal{K}_-)$ , son llamados índices de deficiencia de  $T$ .

Para construir las extensiones autoadjuntas de un operador simétrico usaremos la teoría de espacios de deficiencia de Von Neumann.

**Teorema**

Sea  $T$  un operador cerrado simétrico. Las extensiones simétricas  $T_U$  de  $T$  están en correspondencia uno a uno con el conjunto de isometrías parciales de  $\mathcal{K}_+$  en  $\mathcal{K}_-$ .

Si  $U$  es esa isometría con espacio inicial  $I(U) \subset \mathcal{K}_+$ , entonces la correspondiente extensión cerrada simétrica  $T_U$  tiene dominio

$$D(T_U) = \{\varphi + \varphi_+ + U(\varphi_+) \quad , \varphi \in D(T), \varphi_+ \in I(U)\}$$

y

$$T_U(\varphi + \varphi_+ + U(\varphi_+)) = T\varphi + i\varphi_+ - iU\varphi_+$$

Si  $\dim(I(U)) < \infty$ , los índices de deficiencia de  $T_U$  son

$$n_{\pm}(T_U) = n_{\pm}(T) - \dim(I(U))$$

### Corolario

Sea  $T$  un operador cerrado simétrico con índices de deficiencia  $n_+$  y  $n_-$ .  $T$  posee extensiones autoadjuntas *sii*  $n_+ = n_-$ . Hay una correspondencia uno a uno entre extensiones autoadjuntas de  $T$  y mapeos unitarios de  $\mathcal{K}_+$  en  $\mathcal{K}_-$ .

## 3.2 Efecto Aharonov-Bohm para campos de Dirac sin masa

En 1959, Y. Aharonov y D. Bohm hicieron notar [26] que aún un potencial vector localmente trivial puede dar lugar a efectos observables en una topología no trivial. En estos sistemas, la presencia de un tubo de flujo magnético infinitamente delgado altera el espectro y modifica la energía de vacío dando lugar a una clase de efecto Casimir. Desde entonces se ha reconocido la importancia de campos de background del tipo de Aharonov-Bohm, tanto en física de partículas como en problemas de materia condensada (modelos 2+1-dimensionales en superconductividad).

Más recientemente, se ha prestado atención a la inclusión del spin, principalmente en relación con la interacción de cuerdas cósmicas con la materia [27, 28, 29, 30, 31].

En este capítulo trataremos el problema 2+1-dimensional de un campo de Dirac en presencia de una cuerda de flujo magnético. Debido a la simetría del campo de background, el Hamiltoniano puede ser escrito en una forma diagonal en bloques, teniendo así dos problemas de  $2 \times 2$ .

En este contexto, después de desarrollar las autofunciones en una base angular conveniente, se reconoció la necesidad de considerar extensiones autoadjuntas del Hamiltoniano radial de Dirac [32, 33]. En [33], el autor mostró que existe una familia de un parámetro de condiciones de contorno en el origen, lo cual es equivalente a establecer una relación entre las componentes del spinor, y no imponer la finitud simultánea de ambas componentes. Aún así, en [34] se mostró que sólo dos valores del parámetro de extensión corresponden a la presencia de un campo magnético tipo delta de Dirac en el origen.

En las referencias [27, 30, 31], una de estas posibles condiciones de contorno fue obtenida, partiendo de un modelo en el cual se impone la continuidad de ambas componentes del spinor de Dirac a un radio finito y después se toma el límite del radio

yendo a cero. Sin embargo, cuando este tipo de condición de contorno es impuesta en el origen, se pierde la invarianza bajo traslaciones enteras del flujo magnético reducido [27, 35, 36, 37, 38].

En la siguiente sección adoptaremos el punto de vista de que el origen es un punto excluido. El plano corresponde a un plano pinchado, que tiene la topología de un cilindro, y por lo tanto, la teoría es invariante frente a traslaciones enteras del flujo magnético reducido. Con este espíritu, impondremos sobre el campo de Dirac, y a un radio finito, condiciones de contorno espectrales del tipo de las de Atiyah- Patodi-Singer (APS) [39, 40, 41, 42], tomadas como en las referencias [43, 44]. Haremos luego tender este radio a cero, y mostraremos que se obtiene así una extensión autoadjunta que respeta la mencionada invarianza.

Finalmente, confinaremos al sistema adentro de un círculo pinchado de radio  $R$ , imponiendo allí al campo condiciones de contorno complementarias a las satisfechas en la posición del tubo de flujo, y analizaremos los efectos de polarización del vacío.

Estudiamos entonces la ecuación de Dirac para un campo sin masa en un espacio-tiempo de Minkowski.

$$(i \not{\partial} - \not{A}) \Psi = 0 \tag{3.1}$$

bajo la presencia de un tubo de flujo localizado en el origen,

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{\kappa}{r} \delta(r) \hat{e}_z \tag{3.2}$$

donde  $\kappa = \frac{\Phi}{2\pi}$  es el flujo reducido, y  $r$  es la variable radial en el plano perpendicular al campo.

Supondremos que los fermiones están confinados a dicho plano, de modo que  $\psi = \psi(r, \theta)$  (es independiente de  $z$ ).

Tomando

$$A_\theta = -\frac{\kappa}{r}, \tag{3.3}$$

y con la elección para las matrices de Dirac

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & i\sigma_1 \end{pmatrix} & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

es fácil ver que el Hamiltoniano resulta diagonal en bloques

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

donde los bloques de 2x2 están dados por

$$H_\pm = \begin{pmatrix} 0 & ie^{\mp i\theta} (\partial_r \pm B) \\ -ie^{\pm i\theta} (-\partial_r \pm B) & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

con

$$B = -\frac{i}{r}\partial_\theta - \frac{\kappa}{r}. \quad (3.7)$$

Estas dos “polarizaciones”, que nosotros denotaremos por  $s = \pm 1$ , corresponden a las dos elecciones no equivalentes de las matrices gamma de  $2 \times 2$  [31].

De ahora en más, trabajaremos con  $s = 1$  (el caso  $s = -1$  puede ser estudiado en una forma similar, y siempre que sea necesario se hará referencia explícita a él).

Para este caso, podemos escribir:

$$H_+ = \begin{pmatrix} 0 & L^\dagger \\ L & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } L = -ie^{i\theta}(-\partial_r + B) \quad L^\dagger = ie^{-i\theta}(\partial_r + B), \quad (3.8)$$

y sus autofunciones:

$$\Psi_E = \begin{pmatrix} \varphi_E(r, \theta) \\ \chi_E(r, \theta) \end{pmatrix} \quad \text{satisfacen:} \quad \begin{matrix} L\varphi_E = E\chi_E \\ L^\dagger\chi_E = E\varphi_E \end{matrix}. \quad (3.9)$$

Proponiendo  $\varphi_E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(r) e^{in\theta}$ ,  $\chi_E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n(r) e^{in\theta}$ , resulta el Hamiltoniano radial

$$H_r = \begin{pmatrix} 0 & i(\partial_r + \frac{n+1-\kappa}{r}) \\ -i(-\partial_r + \frac{n-\kappa}{r}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Es fácil ver que las soluciones de la ecuación (3.9) son de la forma

$$\Psi_E(r, \theta) = \begin{pmatrix} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n J_{n-\kappa}(|E|r) + B_n J_{\kappa-n}(|E|r)) e^{in\theta} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} -i \frac{|E|}{E} (A_n J_{n+1-\kappa}(|E|r) - B_n J_{\kappa-n-1}(|E|r)) e^{i(n+1)\theta} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

(Por supuesto, para  $\kappa$  entero, se debe tomar una combinación de funciones de Bessel y de Neumann).

Para  $s = -1$ , se intercambian las componentes superior e inferior de  $\Psi_E$ , y además  $E \rightarrow -E$ .

Es fácil ver ahora, a partir de la ecuación (3.11), que el Hamiltoniano radial de Dirac en el background de un campo de gauge de Aharonov-Bohm requiere una extensión autoadjunta en el subespacio crítico  $n = k$  [27, 32, 33] (el requerimiento de que  $\Psi_E$  sea de cuadrado integrable anula el coeficiente  $B_n$  en (3.11) para  $n > k$ ; en forma similar, se anula el coeficiente  $A_n$  para  $n < k$ ; sin embargo, para  $n = k$  ambos términos en (3.11) son de cuadrado integrable aunque con alguna componente divergente en el origen, y uno tiene una combinación de los mismos). De hecho, imponer la regularidad de ambas componentes del campo de Dirac en el origen es un requerimiento demasiado fuerte, excepto para flujo entero. Si se impone regularidad, el resultado es que el dominio del operador  $H^\dagger$  es mayor que el de  $H$  y, por lo tanto, éste no resulta autoadjunto.

Se debe aplicar entonces la teoría de Von Neumann de los índices de deficiencia (brevemente contada en la sección anterior)[25]. Para ello se buscan los subespacios de deficiencia del Hamiltoniano radial dado en la ecuación (3.10).

$H_r^\dagger$  actúa sobre funciones de cuadrado integrable sobre la semirrecta con medida  $r dr$ .

Fuera del subespacio crítico se encuentra que no existe solución de cuadrado integrable de la ecuación  $H_r^\dagger \psi_\pm = \pm iM\psi_\pm$  (donde  $M$  es un parámetro de masa no nulo que fue introducido por razones dimensionales); esto está de acuerdo con nuestra visión del problema resumida anteriormente. Por el contrario, en el subespacio crítico, los espacios de deficiencia  $K_\pm$  están generados por los vectores  $\begin{pmatrix} K_{-\alpha}(Mr) \\ \mp K_{1-\alpha}(Mr) \end{pmatrix}$  (debe notarse que el spinor  $\begin{pmatrix} I_{-\alpha}(Mr) \\ I_{1-\alpha}(Mr) \end{pmatrix}$  no es de cuadrado integrable sobre toda la semirrecta, por lo que no es admitido en el dominio de la extensión simétrica de  $H_r$ ). Por lo tanto, los índices de deficiencia del problema son  $n_+ = n_- = 1$ .

La extensión simétrica  $H_r^\omega$  de  $H_r$  tiene como dominio

$$D(H_r^\omega) = \left\{ \psi + \beta \begin{pmatrix} K_{-\alpha}(Mr) \\ -K_{1-\alpha}(Mr) \end{pmatrix} + \beta e^{i\omega} \begin{pmatrix} K_{-\alpha}(Mr) \\ K_{1-\alpha}(Mr) \end{pmatrix}, \psi \in D(H_r), \beta \in \mathbf{C}, \omega \in \mathbf{R} \right\} \quad (3.12)$$

Para cada  $\omega$ ,  $H_r^\omega$  resulta un operador simétrico y autoadjunto

$$(H_r^{\omega\dagger} \psi, \phi) - (\psi, H_r^\omega \phi) = 0 \quad \forall \psi, \phi \in D(H_r^\omega) = D(H_r^{\omega\dagger}) \quad (3.13)$$

Las condiciones de contorno permitidas en el origen se obtienen de pedir la anulación de

$$i r \psi^\dagger(r) \sigma_1 \phi(r) \Big|_{r=0} \quad ,$$

que corresponde al término integrado por partes en (3.13), y donde se escribe  $\phi(r) = \begin{pmatrix} f(r) \\ g(r) \end{pmatrix}$  y para  $\psi$  se usa la forma de las funciones en  $D(H_r^\omega)$  (ecuación (3.12)).

Este procedimiento conduce a la familia de un parámetro de condiciones de contorno permitidas, que está caracterizada por [33]

$$i \lim_{r \rightarrow 0} (Mr)^{\nu+1} g(r) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}\right) = \lim_{r \rightarrow 0} (Mr)^{-\nu} f(r) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}\right), \quad (3.14)$$

donde  $\nu$  varía entre  $-1$  y  $0$  ( $\nu = -\alpha$  para  $s = 1$ ;  $\nu = \alpha - 1$  para  $s = -1$ ). Aquí,  $\Theta$  parametriza las extensiones autoadjuntas admisibles, y está relacionado con el parámetro  $\omega$  en la ecuación (3.12) mediante  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} 2^{2\alpha-1} \frac{1}{\tan\left(-\frac{\omega}{2}\right)}$ .

### 3.3 Condiciones APS y extensiones autoadjuntas [45, 46]

Como ya se adelantó, qué condición de contorno se debe imponer en el origen, depende de la situación física en estudio.

Una posibilidad es tomar un tubo de flujo de radio finito, pedir la continuidad de ambas componentes del campo de Dirac a radio finito, y después hacer tender este

radio a cero [27, 30, 31]. De esta forma se obtiene una de las posibles extensiones autoadjuntas, que corresponde a  $\Theta = \frac{\pi}{2} \text{sgn}(\kappa)$ .

Como ya se recaló en [27, 35, 37], este tipo de procedimiento conduce a una condición de contorno que rompe la invarianza frente a  $\kappa \rightarrow \kappa + n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Ahora bien, esta simetría es por supuesto singular cuando se considera todo el plano, pero no lo es cuando el origen es removido o, equivalentemente, el plano tiene la topología de un cilindro.

Para preservar esta simetría, proponemos excluir el origen, imponiendo condiciones de contorno del tipo de Atiyah-Patodi-Singer [39, 40, 41], definidas como en [43], a un radio finito  $r_0$  y haciendo luego tender  $r_0 \rightarrow 0$ . Este tipo de condiciones de contorno no locales fue originalmente introducido por los mencionados autores en relación con el teorema del índice en variedades con borde, del cual se realiza una breve presentación en el Apéndice B.

Al sólo efecto de discutir las condiciones de contorno APS en  $r = r_0$ , introducimos [43, 44]

$$\Psi_E = \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} \varphi_{1E}(r, \theta) \\ e^{i\frac{\theta}{2}} \chi_{1E}(r, \theta) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

y

$$L_1 = -\partial_r + B \quad L_1^\dagger = \partial_r + B \quad , \quad (3.16)$$

de tal forma que

$$L = -i \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{r}} L_1 e^{i\frac{\theta}{2}} \sqrt{r} \quad L^\dagger = i \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{r}} L_1^\dagger e^{-i\frac{\theta}{2}} \sqrt{r} \quad (3.17)$$

con

$$\begin{aligned} L_1 \varphi_{1E} &= iE \chi_{1E} \\ L_1^\dagger \chi_{1E} &= -iE \varphi_{1E} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Expandimos  $\varphi_{1E}$  y  $\chi_{1E}$  en términos de autofunciones de B

$$B e_n = \lambda_n e_n \quad (3.19)$$

Una vez que se impone la condición de que  $\varphi_E$  y  $\chi_E$  en la ecuación (3.9) sean monovaluadas en  $\theta$ , estas  $e_n$  son de la forma:

$$e_n = e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} \quad , \quad \text{con} \quad \lambda_n(r) = \frac{n + \frac{1}{2} - \kappa}{r} \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.20)$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \varphi_{1E}(r, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} \\ \chi_{1E}(r, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(r) e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Reemplazando en (3.18) obtenemos, para  $\kappa$  no entero ( $\kappa = k + \alpha$ , con  $k$  la parte entera de  $\kappa$  y  $\alpha$  su parte fraccionaria)

$$\begin{aligned}\varphi_{1E}(r, \theta) &= \sqrt{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n J_{n-\kappa}(|E|r) + B_n J_{\kappa-n}(|E|r)) e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} \\ \chi_{1E}(r, \theta) &= -i \frac{|E|}{E} \sqrt{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n J_{n+1-\kappa}(|E|r) - B_n J_{\kappa-n-1}(|E|r)) e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}\end{aligned}\quad (3.22)$$

Para tratar las condiciones APS en  $r = r_0$ , consideramos el desarrollo en la ecuación (3.21), e imponemos:

$$\begin{aligned}f_n(r_0) &= 0 & \text{for } \lambda_n(r_0) &\leq 0 \\ g_n(r_0) &= 0 & \text{for } \lambda_n(r_0) &> 0\end{aligned}\quad (3.23)$$

para  $s = 1$ .

Como es bien sabido, imponer este tipo de condición de contorno es equivalente a remover el borde, pegándole un tubo semi-infinito en esta posición, y extendiendo la ecuación de Dirac por una extensión constante del campo de gauge, mientras se impone que los modos cero sean de cuadrado integrable [44, 47] (excepto para  $\lambda_n = 0$ , en cuyo caso permanece un modo cero constante, con una componente inferior no nula).

Yendo entonces a la ecuación (3.22) tenemos, después de usar el comportamiento dominante de las funciones de Bessel para pequeños argumentos:

$$\begin{aligned}\frac{A_n}{B_n} &\sim r_0^{2(k+\alpha-n)} & n - k + \frac{1}{2} - \alpha &\leq 0 \\ \frac{B_n}{A_n} &\sim r_0^{2(n+1-k-\alpha)} & n - k + \frac{1}{2} - \alpha &> 0\end{aligned}\quad (3.24)$$

Analizamos ahora dos situaciones diferentes:

Si  $\alpha \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{A_n}{B_n} &\rightarrow_{r_0 \rightarrow 0} 0 & \text{para } n &\leq k \\ \frac{B_n}{A_n} &\rightarrow_{r_0 \rightarrow 0} 0 & \text{para } n &\geq k + 1\end{aligned}\quad (3.25)$$

y las autofunciones en la ecuación (3.11) son de la forma:

$$\begin{aligned}\Psi_E(r, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^k B_n \left( J_{k+\alpha-n}(|E|r) e^{in\theta} \right. \\ &\quad \left. + i \frac{|E|}{E} J_{k+\alpha-n-1}(|E|r) e^{i(n+1)\theta} \right) + \\ &\quad \sum_{n=k+1}^{\infty} A_n \left( J_{n-k-\alpha}(|E|r) e^{in\theta} \right. \\ &\quad \left. - i \frac{|E|}{E} J_{n+1-k-\alpha}(|E|r) e^{i(n+1)\theta} \right).\end{aligned}\quad (3.26)$$

Si  $\alpha < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{A_n}{B_n} &\rightarrow_{r_0 \rightarrow 0} 0 & \text{para } n &\leq k - 1 \\ \frac{B_n}{A_n} &\rightarrow_{r_0 \rightarrow 0} 0 & \text{para } n &\geq k\end{aligned}\quad (3.27)$$

y las autofunciones resultan:

$$\Psi_E(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{k-1} B_n \left( J_{k+\alpha-n}(|E|r) e^{in\theta} \right. \\ \left. + i \frac{|E|}{E} J_{k+\alpha-n-1}(|E|r) e^{i(n+1)\theta} \right) +$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} A_n \begin{pmatrix} J_{n-k-\alpha}(|E|r) e^{in\theta} \\ -i \frac{|E|}{E} J_{n+1-k-\alpha}(|E|r) e^{i(n+1)\theta} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Nuestro procedimiento conduce a una extensión autoadjunta que satisface la condición de mínima irregularidad (las funciones radiales divergen en  $r \rightarrow 0$  a lo sumo como  $r^{-p}$ , con  $p \leq \frac{1}{2}$ ). La misma corresponde a los valores del parámetro  $\Theta$  :

$$\Theta = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{para } \alpha \geq \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{para } \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (3.29)$$

$\Theta = \pm \frac{\pi}{2}$  son los dos únicos valores posibles del parámetro que corresponden a tener un campo magnético delta de Dirac en el origen [34].

Más aún, esta extensión es compatible con la periodicidad en  $\kappa$ . De hecho, la dependencia sobre  $k$  puede ser reducida a un factor de fase overall en las autofunciones.

En lo que respecta a conjugación de carga,

$$\Psi_E \rightarrow \sigma_1 \Psi_E^* \quad ; \quad \kappa \rightarrow -\kappa,$$

la misma es respetada por las autofunciones, excepto para  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Esto se debe a la presencia ya comentada de un modo cero constante sobre el cilindro.

Debe notarse que, para la representación  $s = -1$  de matrices de Dirac de  $2 \times 2$

$$\Psi_E^{(-)} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} \sum f_n e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} \\ e^{-i\frac{\theta}{2}} \sum g_n e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

y las condiciones de contorno APS deben ser invertidas, para  $\lambda_n \neq 0$ , respecto de la ecuación (3.23), ya que el operador B cambia a  $-B$ .

Para  $\lambda_n = 0$  tomaremos la componente inferior igual a cero en  $r_0$ ; esto, como mostraremos mas adelante, permite que la conjugación de carga sea una simetría del modelo completo. De esta forma tomamos

$$\begin{aligned} f_n(r_0) &= 0 & \text{para } \lambda_n(r_0) > 0 \\ g_n(r_0) &= 0 & \text{para } \lambda_n(r_0) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

para  $s = -1$ .

En este caso, la extensión resultante corresponde a

$$\Theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{para } \alpha \geq \frac{1}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{para } \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (3.32)$$

Este es un ejemplo de una aplicación física de las condiciones APS, las que son generalmente elegidas sólo debido a su interés matemático. Todas las conclusiones respecto al comportamiento en el origen siguen siendo ciertas para campos de Dirac masivos. El procedimiento de imponer condiciones de contorno a radio finito, luego llevado a cero, fue considerado para campos masivos en [48], donde se examinaron ciertos números de vacío.

Debe mencionarse que, para  $\kappa = k$  entero, nuestro procedimiento conduce al requerimiento de regularidad de ambas componentes en el origen (tanto para  $s = 1$  como para  $s = -1$ ). En este caso

$$\Psi_E(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \begin{pmatrix} J_{n-\kappa}(|E|r) e^{in\theta} \\ -i \frac{|E|}{E} J_{n+1-\kappa}(|E|r) e^{i(n+1)\theta} \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

### 3.4 Efectos de polarización de vacío en una región acotada

Confinamos ahora al campo de Dirac adentro de una región acotada, introduciendo un borde en  $r = R$ . Estudiamos entonces el efecto combinado de la presencia de un campo de background y la existencia de bordes, que imponen condiciones de contorno al sistema. Sobre el borde exterior exigiremos que el campo satisfaga condiciones tipo APS, complementarias a las consideradas en  $r = r_0$ .

Para  $s = 1$ , estas condiciones son

$$\begin{aligned} f_n(R) &= 0 & \text{for } \lambda_n(R) > 0 \\ g_n(R) &= 0 & \text{for } \lambda_n(R) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Vamos a estudiar primero los modos cero de la teoría,

$$\Psi_0(r, \theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n r^{n-k-\alpha} e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n r^{k+\alpha-n-1} e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Las condiciones en  $r = r_0$  implican

$$\begin{aligned} A_n &= 0 & , & \text{ para } n \leq k + \alpha - \frac{1}{2} \\ B_n &= 0 & , & \text{ para } n > k + \alpha - \frac{1}{2} \end{aligned}, \quad (3.36)$$

mientras que las condiciones de contorno en  $R$  implican

$$\begin{aligned} A_n &= 0 & , & \text{ para } n > k + \alpha - \frac{1}{2} \\ B_n &= 0 & , & \text{ para } n \leq k + \alpha - \frac{1}{2} \end{aligned}. \quad (3.37)$$

Por lo tanto, ningún modo cero sobrevive con las condiciones de contorno tomadas, aun cuando no se haga  $r_0 \rightarrow 0$ . Esto está en completo acuerdo con el teorema del índice [39, 40, 41], que se discute brevemente en el Apéndice B. De hecho, de acuerdo con este teorema,

$$n_+ - n_- = \mathcal{A} + b(r_0) + b(R) \quad (3.38)$$

donde  $n_+(n_-)$  es el número de soluciones de energía cero de quiralidad positiva (negativa),  $\mathcal{A}$  es la anomalía, o contribución del volumen, y  $b$  son las contribuciones de superficie que vienen de los bordes [42, 43]:

$$b(R) = \frac{1}{2}(h_R - \eta(R)) \quad b(r_0) = \frac{1}{2}(\eta(r_0) - h_{r_0}), \quad (3.39)$$

con

$$\eta(r) = \left. \sum_{\lambda_n(r) \neq 0} \operatorname{sgn} \lambda_n(r) |\lambda_n(r)|^{-s} \right|_{s=0} \quad (3.40)$$

la asimetría espectral del operador de borde B, y donde  $h_r$  es la dimensión de su núcleo.

En nuestro caso:

$$b(r_0) = \begin{cases} \alpha - 1 & \alpha > \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha & \alpha < \frac{1}{2} \end{cases} \quad b(R) = \begin{cases} 1 - \alpha & \alpha > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha = \frac{1}{2} \\ -\alpha & \alpha < \frac{1}{2} \end{cases} . \quad (3.41)$$

Se ve entonces que las contribuciones de borde se cancelan. Con respecto a la parte de volumen, también se anula para la configuración del campo de gauge que tomamos; esto nos deja  $n_+ - n_- = 0$ , que resulta consistente con nuestro análisis a partir de la ecuación (3.37).

Se pueden establecer idénticas conclusiones con respecto al índice para el caso  $s = -1$ , ya que ambas contribuciones de borde se intercambian.

Estudiaremos ahora el espectro de energía; el mismo puede ser determinado imponiendo (para  $s = 1$ ) en  $r = R$  las condiciones de contorno (3.34) sobre las autofunciones de la ecuación (3.26) si  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ , o sobre las autofunciones en (3.28), si  $\alpha < \frac{1}{2}$ . Al hacer esto, obtenemos:

$$E_{n,l} = \begin{cases} \pm \frac{j_{n-\alpha,l}}{R} & , \quad n = 1, \dots, \infty \quad l = 1 \dots \infty \\ \pm \frac{j_{n+\alpha,l}}{R} & , \quad n = -1, \dots, \infty \quad l = 1 \dots \infty \end{cases} \quad \text{para } \alpha \geq \frac{1}{2} \quad (3.42)$$

y

$$E_{n,l} = \begin{cases} \pm \frac{j_{n-\alpha,l}}{R} & , \quad n = 0, \dots, \infty \quad l = 1 \dots \infty \\ \pm \frac{j_{n+\alpha,l}}{R} & , \quad n = 0, \dots, \infty \quad l = 1 \dots \infty \end{cases} \quad \text{para } \alpha < \frac{1}{2}, \quad (3.43)$$

donde  $j_{\nu,l}$  es la  $l$ -ésima raíz positiva de  $J_\nu$ . Para  $s = -1$  se obtiene el mismo espectro.

Para ambos valores de  $s$ , el espectro de energía resulta simétrico con respecto a cero. Este hecho, junto con la ausencia de modos cero, resultan en un valor de expectación de vacío nulo para el número fermiónico [49]:

$$\langle N \rangle_+ = -\frac{1}{2}(n_+ - n_-) = 0. \quad (3.44)$$

Por las mismas razones  $\langle N \rangle_- = 0$ ; por lo tanto, el número fermiónico total de la teoría es nulo.

Es interesante notar que el origen contribuye al número fermiónico con (este tema está discutido en [48])

$$\langle N \rangle_{r_0, \pm} = \begin{cases} \mp \frac{1}{2}(\alpha - 1) & \alpha > \frac{1}{2} \\ \pm \frac{1}{4} & \alpha = \frac{1}{2} \\ \mp \frac{1}{2}\alpha & \alpha < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.45)$$

que coincide, para cada valor de  $s$ , con el resultado presentado en [35, 37], donde signos opuestos de la masa corresponden a nuestros signos opuestos de  $s$ , excepto para  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Este último hecho está asociado con la falta de invarianza de conjugación de carga en cada subespacio. Aun así, la suma de ambas contribuciones se cancela para todo  $\alpha$ .

Evaluaremos ahora la energía de Casimir. De acuerdo a lo expuesto en el capítulo anterior, y usando el método de suma de modos, la misma está formalmente dada por

$$E_C = -\frac{1}{2} \left( \sum_{E>0} E_{n,l} - \sum_{E<0} E_{n,l} \right) = - \left( \sum_{E>0} E_{n,l} \right) , \quad (3.46)$$

donde se ha usado la simetría del espectro de energía del problema. Por supuesto, un método de regularización debe ser usado para dar sentido a esta suma divergente. Para ello usaremos la técnica de regularización de la función  $\zeta$ .

$$E_C = -\mu \sum_{E>0} \left( \frac{E_{n,l}}{\mu} \right)^{-z} \Big|_{z=-1} , \quad (3.47)$$

donde el parámetro  $\mu$  fue introducido por razones dimensionales.

En este punto, es útil introducir las llamadas zeta parciales, ya definidas en las referencias [50, 51, 52]:

$$\zeta_\nu(z) = \sum_{l=1}^{\infty} (j_{\nu,l})^{-z} . \quad (3.48)$$

Para el problema que estamos analizando, y usando las ecuaciones (3.42), (3.43), (3.47) y (3.48), tenemos

$$E_C = -2\mu (\mu R)^z \sum_{\nu} \zeta_\nu(z) \Big|_{z=-1} , \quad (3.49)$$

con

$$\sum_{\nu} \zeta_\nu = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_{|n-\alpha|} + \zeta_{\alpha-1} & \text{para } \alpha \geq \frac{1}{2} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_{|n-\alpha|} + \zeta_{-\alpha} & \text{para } \alpha < \frac{1}{2} \end{cases} . \quad (3.50)$$

Debe notarse que, como consecuencia de las propiedades de invarianza de las condiciones de contorno, la energía de Casimir resulta periódica en  $\kappa$  e invariante frente a  $\alpha \rightarrow 1 - \alpha$ , tanto como continua a valores enteros de  $\kappa$ .

Para cualquier valor de  $\kappa$ , es la suma de la energía correspondiente a un campo escalar en presencia de una cuerda de flujo y sujeta a condiciones de contorno Dirichlet (estudiada en la referencia [50]), más una zeta parcial que viene, para  $\kappa$  fraccionario, de la presencia de una autofunción que es singular en el origen o, para  $\kappa$  entero, de la duplicación de  $J_0$ .

Ambas contribuciones pueden ser estudiadas siguiendo los métodos empleados en [50, 51, 52].

La contribución del campo escalar presenta un polo en  $z = -1$ , con un residuo independiente de  $\alpha$ . En este caso es posible, por lo tanto, definir una energía de Casimir renormalizada como

$$E_C^{ren} = E_C(\alpha) - E_C(0) . \quad (3.51)$$

Esta cantidad puede ser obtenida mediante cálculos numéricos (el procedimiento es idéntico al dado en [50]).

Volviendo al campo de Dirac, la zeta parcial que aparece en las ecuaciones (3.49) y (3.50) nuevamente puede ser evaluada siguiendo los métodos de [50]. Sin embargo, en este caso, hay un polo presente, cuyo residuo depende de  $\alpha$ :

$$\zeta_\nu(z) \Big|_{z=-1} = F.P. + \frac{1}{8\pi} (1 - 4\nu^2) \frac{1}{z+1} \Big|_{z=-1} . \quad (3.52)$$

Este residuo sólo se anula para  $\nu = \pm \frac{1}{2}$  ( $\alpha = \frac{1}{2}$ ).

La parte finita de la energía de Casimir está graficada en la figura (3.4) como una función de  $\alpha$  para  $\mu R = 1$ . Por supuesto, no se le puede asignar ningún significado absoluto, debido a la presencia del polo y a la subsecuente necesidad de introducir contratérminos dependientes de  $\alpha$ .

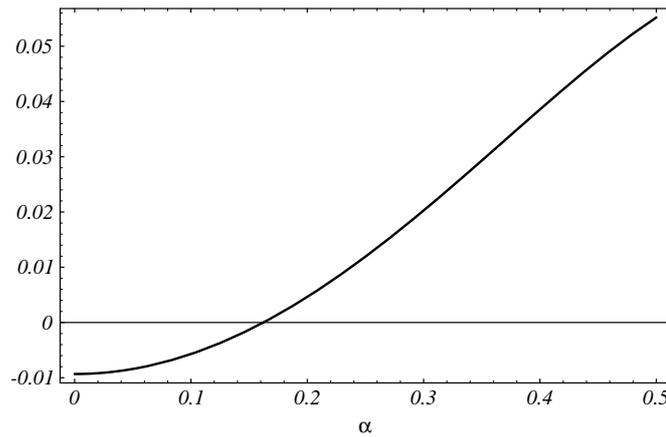


Figure 3.1: Parte finita de la energía de Casimir adimensionalizada.

Aún así, debe notarse que, al contrario del tratamiento en el origen, las condiciones APS fueron impuestas en el borde exterior por razones puramente formales (poder verificar el teorema del índice). Sin embargo, deberían considerarse condiciones más realistas, por ejemplo las de la bolsa de MIT. Este será el objeto del siguiente capítulo.



---

---

## CHAPTER 4

---

# Fermiones masivos bajo condiciones MIT en un background de Aharonov-Bohm [53]

### 4.1 Generalidades

Como es bien sabido (y fue mencionado en el capítulo anterior), la presencia de campos de background modifica el espectro de energía y, por lo tanto, da lugar a una energía de vacío no trivial, o efecto Casimir [1, 2]. Por otro lado, la energía de Casimir es alterada por la presencia de bordes, y la subsecuente imposición de condiciones de contorno sobre los campos cuánticos. En particular, para campos de Dirac, se han estudiado muchos ejemplos de ambas situaciones [54, 11, 45, 55].

Por ejemplo, en [50], se estudió el efecto combinado de un fluxón magnético clásico y condiciones de contorno MIT sobre la energía de vacío de un campo de Dirac sin masa en un espacio 2+1-dimensional. Allí fue considerada una de las posibles extensiones autoadjuntas del Hamiltoniano radial.

En el capítulo anterior habíamos estudiado, para una particular extensión autoadjunta, la energía de Casimir de fermiones sin masa, sometidos a condiciones APS en la frontera exterior del círculo. En este capítulo consideraremos el caso más realista de fermiones masivos sometidos a condiciones MIT. Estas condiciones son de interés por su aplicación a modelos efectivos de confinamiento. En efecto, tales condiciones eliminan el flujo de corriente a través de la frontera [56].

Es importante mencionar que, a pesar de lo que generalmente se cree (o espera), en el caso de bordes curvos, la presencia de la masa no tiene un efecto exponencial-

mente pequeño [57] como sucede en el caso de placas paralelas [2] (ver también ejemplos en la Sección 2.3). Por el contrario, en ciertas situaciones podría aún llevar a un cambio de signo en la fuerza de Casimir y resulta no despreciable [57]. Veremos que propiedades tales como existencia de un mínimo o continuidad de la energía de Casimir como función del flujo dependen fuertemente de la masa.

Como se mostró en el capítulo anterior, el Hamiltoniano radial de Dirac en presencia del campo de background de una cuerda magnética, posee una familia de extensiones autoadjuntas en el origen; diferentes extensiones son manifestaciones de diferentes físicas dentro del vórtice [33]. En particular, analizaremos dos posibles extensiones autoadjuntas, ambas compatibles con la presencia de un campo magnético delta de Dirac en el origen [34]. Es bien sabido que el parámetro que caracteriza la extensión determina, junto con el flujo, el Hamiltoniano efectivo fuera del vórtice [33]. Como consecuencia, las energías de Casimir obtenidas para diferentes extensiones autoadjuntas presentan comportamientos muy diferentes, remarcando una vez más que ellas describen la física no trivial dentro del tubo de flujo.

Estudiamos la ecuación de Dirac para una partícula masiva confinada a un espacio  $2 + 1$ -dimensional.

$$(i \not{\partial} - \not{A} - m) \Psi = 0 \quad (4.1)$$

en presencia de una cuerda de flujo localizada en el origen

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{\kappa}{r} \delta(r) \check{e}_z, \quad (4.2)$$

donde  $\kappa = \frac{\Phi}{2\pi}$  es el flujo reducido.

Como en el capítulo anterior, suponemos la cuerda de flujo radialmente simétrica; por lo tanto, podemos elegir un gauge tal que el vector potencial esté dado por

$$A_\theta(r) = -\frac{\kappa}{r}, \quad \text{para } r > 0. \quad (4.3)$$

Consideraremos la representación quirral de las matrices gamma

$$\gamma^0 = \rho_3 \otimes \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\rho_3 \otimes \sigma_2, \quad \gamma^2 = -i\rho_3 \otimes \sigma_1, \quad (4.4)$$

que, junto con

$$\gamma^3 = i\rho_2 \otimes \sigma_0, \quad (4.5)$$

dan un álgebra de Clifford cerrada.

Por lo tanto, la ecuación de autovalores para el Hamiltoniano de Dirac tiene la forma

$$\begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} \Psi_E = E \Psi_E, \quad (4.6)$$

donde los bloques de  $2 \times 2$  están dados por

$$H_\pm = \begin{pmatrix} \mp m & L^\dagger \\ L & \pm m \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

y hemos introducido  $L = -ie^{i\theta} (-\partial_r + B)$ ,  $L^\dagger = ie^{-i\theta} (\partial_r + B)$ ,  $B = -\frac{i}{r} \partial_\theta - \frac{\kappa}{r}$ .

La solución general de la ecuación (4.6) puede ser escrita como una combinación de

$$\Psi_E^{(I)} = \begin{pmatrix} \psi_E^+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_E^{(II)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_E^- \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

con

$$H_{\pm} \psi_E^{\pm} = E \psi_E^{\pm}. \quad (4.9)$$

Luego de separar variables, y para  $\kappa = \ell + a$  no entero ( $\ell$  es la parte entera del flujo reducido, y  $a$  su parte fraccionaria), las autofunciones en la ecuación (4.6) resultan

$$\begin{aligned} \Psi_E(r, \theta) &= \begin{pmatrix} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^+(r) e^{in\theta} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n^+(r) e^{i(n+1)\theta} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^-(r) e^{in\theta} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n^-(r) e^{i(n+1)\theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n^+ J_{n-\kappa}(kr) + B_n^+ J_{\kappa-n}(kr)) e^{in\theta} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} -i \frac{k}{E-m} (A_n^+ J_{n+1-\kappa}(kr) - B_n^+ J_{\kappa-n-1}(kr)) e^{i(n+1)\theta} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n^- J_{n-\kappa}(kr) + B_n^- J_{\kappa-n}(kr)) e^{in\theta} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} -i \frac{k}{E+m} (A_n^- J_{n+1-\kappa}(kr) - B_n^- J_{\kappa-n-1}(kr)) e^{i(n+1)\theta} \end{pmatrix}, \quad (4.10) \end{aligned}$$

donde  $k = +\sqrt{(E^2 - m^2)}$ .

(Por supuesto, para  $\kappa$  entero, se debe tomar una combinación lineal de funciones Bessel y Neumann).

Como vimos en el capítulo anterior, el Hamiltoniano radial de Dirac requiere una extensión autoadjunta en el subespacio crítico  $n = \ell$  [27, 32, 33]. Se debe, por lo tanto, aplicar la teoría de los índices de deficiencia de von Neumann [25], que conduce a una familia a un parámetro de condiciones permitidas en el origen [33], caracterizadas por (ver ecuación (3.14))

$$i \lim_{r \rightarrow 0} (mr)^{1-a} g_{\ell}^{\pm}(r) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta^{\pm}}{2}\right) = \lim_{r \rightarrow 0} (mr)^a f_{\ell}^{\pm}(r) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta^{\pm}}{2}\right). \quad (4.11)$$

Aquí,  $\Theta^{\pm}$  parametriza las extensiones autoadjuntas de  $H_{\pm}$  respectivamente.

En este capítulo consideraremos, para  $\kappa$  no entero, dos comportamientos diferentes en el origen. El primero, que denotaremos como comportamiento I, está caracterizado por

$$\Theta^{\pm} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{para } a \geq \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{para } a < \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (4.12)$$

Como se muestra en las referencias [45, 46], y se ha explicado en el capítulo anterior, esta es la extensión que resulta cuando condiciones de contorno del tipo de Atiyah-Patodi-Singer (APS) [39, 40, 41, 42, 43, 44] son impuestas a un radio finito, que es después llevado a cero.

La segunda extensión autoadjunta que consideraremos, de aquí en más denotada por comportamiento II, corresponde a

$$\Theta^{\pm} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{para } \kappa > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{para } \kappa < 0 \end{cases}. \quad (4.13)$$

En la referencia [30] se mostró que esta extensión surge cuando se considera un tubo de radio finito, se impone continuidad a las componentes del spinor en la posición del tubo, y luego se hace tender su radio a cero.

Fuera del subespacio crítico, las autofunciones en la ecuación (4.10) están determinadas por el requerimiento de que las funciones sean de cuadrado integrable en el origen, y, por lo tanto, son idénticas para los comportamientos I y II. Ellas están dadas por

$$\Psi_E^{n \leq \ell-1}(r, \theta) = \begin{pmatrix} B_n^+ J_{\ell+a-n}(kr) e^{in\theta} \\ i \frac{k}{E-m} B_n^+ J_{\ell+a-n-1}(kr) e^{i(n+1)\theta} \\ B_n^- J_{\ell+a-n}(kr) e^{in\theta} \\ i \frac{k}{E+m} B_n^- J_{\ell+a-n-1}(kr) e^{i(n+1)\theta} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

y

$$\Psi_E^{n \geq \ell+1}(r, \theta) = \begin{pmatrix} A_n^+ J_{n-\ell-a}(kr) e^{in\theta} \\ -i \frac{k}{E-m} A_n^+ J_{n+1-\ell-a}(kr) e^{i(n+1)\theta} \\ A_n^- J_{n-\ell-a}(kr) e^{in\theta} \\ -i \frac{k}{E+m} A_n^- J_{n+1-\ell-a}(kr) e^{i(n+1)\theta} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

En el subespacio crítico ( $n = \ell$ ), la autofunción para el comportamiento I está dada por

$$\Psi_E^\ell(r, \theta) = \begin{pmatrix} B_\ell^+ J_a(kr) e^{i\ell\theta} \\ i \frac{k}{E-m} B_\ell^+ J_{a-1}(kr) e^{i(\ell+1)\theta} \\ B_\ell^- J_a(kr) e^{i\ell\theta} \\ i \frac{k}{E+m} B_\ell^- J_{a-1}(kr) e^{i(\ell+1)\theta} \end{pmatrix} \quad \text{para } a \geq \frac{1}{2}, \quad (4.16)$$

y

$$\Psi_E^\ell(r, \theta) = \begin{pmatrix} A_\ell^+ J_{-a}(kr) e^{i\ell\theta} \\ -i \frac{k}{E-m} A_\ell^+ J_{1-a}(kr) e^{i(\ell+1)\theta} \\ A_\ell^- J_{-a}(kr) e^{i\ell\theta} \\ -i \frac{k}{E+m} A_\ell^- J_{1-a}(kr) e^{i(\ell+1)\theta} \end{pmatrix} \quad \text{para } a < \frac{1}{2}. \quad (4.17)$$

Es fácil ver que esta extensión satisface la condición de mínima irregularidad (las funciones radiales divergen cuando  $r \rightarrow 0$  a lo sumo como  $r^{-p}$ , con  $p \leq \frac{1}{2}$ ); y es compatible con la periodicidad en  $\kappa$ , un requerimiento natural cuando el origen es un punto excluido.

Cuando se impone el comportamiento II en el origen, las autofunciones en el subespacio crítico están dadas por la ecuación (4.16) para  $\kappa > 0$ , y por la ecuación (4.17) para  $\kappa < 0$ .

Para  $\kappa = \ell$ , tanto las condiciones APS como las de un tubo de flujo de radio finito conducen, cuando se toma el límite singular, al requerimiento de regularidad de todas las componentes en el origen. En este caso

$$\Psi_E(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} A_n^+ J_{n-\kappa}(kr) e^{in\theta} \\ -i \frac{k}{E-m} A_n^+ J_{n+1-\kappa}(kr) e^{i(n+1)\theta} \\ A_n^- J_{n-\kappa}(kr) e^{in\theta} \\ -i \frac{k}{E+m} A_n^- J_{n+1-\kappa}(kr) e^{i(n+1)\theta} \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

## 4.2 Cálculo de la energía de Casimir

De ahora en más, confinaremos al campo de Dirac dentro de una región espacial acotada, introduciendo un borde en  $r = R$ , e imponiendo allí condiciones de la bolsa de MIT.

La energía de Casimir está formalmente dada por

$$E_C = -\frac{1}{2} \left( \sum_{E>m} E_\rho - \sum_{E<-m} E_\rho \right), \quad (4.19)$$

donde  $\rho$  representa todos los índices que aparecen en la ecuación de autovalores que surge luego de imponer condiciones locales MIT. Al hacer esto, uno debe considerar un operador de borde  $B$  que, con la representación de las matrices de Dirac dada en la ecuación (4.4), resulta también diagonal en bloques, y puede ser escrito como

$$B = 1 - i \not{n} = 1 + i(\gamma^1 n^1 + \gamma^2 n^2) = \begin{pmatrix} B_+ & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & B_- \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

donde  $n$  es el normal exterior, y

$$B_\pm = \begin{pmatrix} 1 & \pm i e^{-i\theta} \\ \mp i e^{i\theta} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Consideramos primero el comportamiento I (II) para  $a \geq 1/2$  ( $\kappa > 0$ ). Entonces, las ecuaciones de autovalores para la polarización superior (+) son

$$J_{n+a}(kR) = \frac{k}{E-m} J_{n-1+a}(kR) \quad , \quad n = 1, \dots, \infty, \quad (4.22)$$

$$J_{n-a}(kR) = \frac{-k}{E-m} J_{n+1-a}(kR) \quad , \quad n = 1, \dots, \infty, \quad (4.23)$$

que provienen de los subespacios no críticos, y

$$J_a(kR) = \frac{k}{E-m} J_{a-1}(kR), \quad (4.24)$$

que corresponde al subespacio crítico.

Las ecuaciones de autovalores para la polarización inferior (−) son

$$J_{n+a}(kR) = \frac{-k}{E+m} J_{n-1+a}(kR) \quad , \quad n = 1, \dots, \infty, \quad (4.25)$$

$$J_{n-a}(kR) = \frac{k}{E+m} J_{n+1-a}(kR) \quad , \quad n = 1, \dots, \infty, \quad (4.26)$$

para subespacios no críticos, y

$$J_a(kR) = \frac{-k}{E+m} J_{a-1}(kR), \quad (4.27)$$

para el subespacio crítico.

Para  $a < 1/2$  ( $\kappa < 0$ ), las contribuciones provenientes de los subespacios no críticos son las mismas, mientras que aquellas debidas a  $n = \ell$  son

$$J_{-a}(kR) = \frac{-k}{E-m} J_{1-a}(kR), \quad (4.28)$$

para la polarización +, y

$$J_{-a}(kR) = \frac{k}{E+m} J_{1-a}(kR), \quad (4.29)$$

para la polarización -.

Es fácil verificar que energías positivas provenientes de una polarización corresponden a energías negativas que vienen de la otra. Por lo tanto, ambas polarizaciones dan idénticas contribuciones a la energía de Casimir en la ecuación (4.19). Como consecuencia, la expresión formal para la energía de Casimir es

$$E_C = -\frac{1}{2} 2 \sum_k (k^2 + m^2)^{1/2}, \quad (4.30)$$

donde  $k$  denota las soluciones de

$$J_{n+a}^2(kR) - J_{n-1+a}^2(kR) - \frac{2m}{k} J_{n+a}(kR) J_{n-1+a}(kR) = 0$$

para  $n = 0, \dots, \infty$ , (4.31)

$$J_{n-a}^2(kR) - J_{n+1-a}^2(kR) + \frac{2m}{k} J_{n-a}(kR) J_{n+1-a}(kR) = 0$$

para  $n = 1, \dots, \infty$ , (4.32)

cuando  $a \geq 1/2$  ( $\kappa > 0$ ) mientras que, para  $a < 1/2$  ( $\kappa < 0$ ), la ecuación (4.31) se cumple para  $n = 1, \dots, \infty$  y la ecuación (4.32) para  $n = 0, \dots, \infty$ .

Como es usual, un método de regularización debe ser introducido para dar sentido a la suma divergente en la ecuación (4.30). Dentro del esquema de la regularización de la función  $\zeta$  [4, 14] (para varias aplicaciones también se pueden ver [58, 59]),

$$E_C = -\frac{1}{2} M \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} M^{2s} \zeta(s) = -\frac{1}{2} M \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} 2 \sum_k \left( \frac{k^2 + m^2}{M^2} \right)^{-s}, \quad (4.33)$$

donde el parámetro  $M$  fue introducido por razones dimensionales.

A esta altura, es útil definir la función zeta parcial

$$\zeta_\mu(s) = 2 \sum_{l=1}^{\infty} (k_{\mu,l}^2 + m^2)^{-s}, \quad (4.34)$$

donde  $k_{\mu,l}$  son las raíces de

$$J_\mu^2(kR) - J_{\mu-1}^2(kR) - \frac{2m}{k} J_\mu(kR) J_{\mu-1}(kR) = 0. \quad (4.35)$$

Por lo tanto, luego de introducir  $\nu = n + \frac{1}{2}$  y  $\alpha = a - \frac{1}{2}$ , se puede escribir la energía de Casimir para el comportamiento I en el origen, y para cualquier  $a$ , como

$$E_C^I = -\frac{1}{2}M \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} M^{2s} \left\{ \sum_{\nu=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} [\zeta_{\nu+\alpha}(s) + \zeta_{\nu-\alpha}(s)] - \zeta_{\frac{1}{2}-|\alpha|}(s) \right\}, \quad (4.36)$$

mientras que para el comportamiento II en el origen está dada por

$$E_C^{II} = -\frac{1}{2}M \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} M^{2s} \left\{ \sum_{\nu=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} [\zeta_{\nu+\alpha}(s) + \zeta_{\nu-\alpha}(s)] - \zeta_{\frac{1}{2}-\text{sgn}(\kappa)\alpha}(s) \right\}. \quad (4.37)$$

Como se mencionó antes, es claro, a partir de la ecuación (4.36), que para el comportamiento tipo I la energía de Casimir es independiente de la parte entera  $\ell$  del flujo reducido. De hecho, es invariante frente a  $\alpha \rightarrow -\alpha$  ( $a \rightarrow 1 - a$ ). Por lo tanto, es suficiente estudiarla para  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ , en cuyo caso se puede ignorar el valor absoluto en el último término, y usar  $E_C^I(\alpha) = E_C^I(-\alpha)$ .

Similarmente, a partir de la ecuación (4.37), para un comportamiento tipo II en el origen, la energía de Casimir resulta invariante frente a  $\kappa \rightarrow -\kappa$ . Entonces basta estudiar el caso  $\kappa > 0$ , donde el último término es nuevamente  $\zeta_{\frac{1}{2}-\alpha}(s)$  y se considera  $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ .

Las energías de Casimir en las ecuaciones (4.36) y (4.37) contienen dos contribuciones: el término dentro de los corchetes, que está sumado sobre  $\nu$ , y el último término, que es una función zeta parcial.

En ambos casos es útil introducir, como en las referencias [50, 51, 52], una representación integral para la función zeta parcial:

$$\zeta_\mu(s) = 2 \frac{\sin \pi s}{\pi} R^{2s} \int_z^\infty dx [x^2 - z^2]^{-s} \frac{d}{dx} \ln [x^{-2(\mu-1)} F_\mu(x)], \quad (4.38)$$

donde

$$F_\mu(x) = I_\mu^2(x) + I_{\mu-1}^2(x) + \frac{2z}{x} I_\mu(x) I_{\mu-1}(x), \quad (4.39)$$

que puede ser usada en los diversos términos de las ecuaciones (4.36) y (4.37). Aquí hemos introducido la variable adimensional  $z = mR$ .

Para identificar las divergencias y evaluar las partes finitas de los términos en las ecuaciones (4.36) y (4.37) se debe realizar una continuación analítica a  $s = -\frac{1}{2}$ . Un método para hacer esto ha sido desarrollado en [60]. Para la parte de las funciones zeta que involucra la suma sobre  $\nu$ , el método consiste en adicionar y sustraer varios órdenes de la expansión uniforme asintótica de Debye de la ecuación (4.39) de tal forma de hacer tanto la suma como la integral en las ecuaciones (4.36), (4.37) y (4.38) bien definidas en una franja creciente del plano complejo  $s$ . Para la función zeta parcial, en cambio, será suficiente sustraer y sumar términos del desarrollo asintótico para grandes argumentos de las funciones de Bessel.

Estudiamos primero los términos sumados sobre  $\nu$ . Usando las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel, se obtiene

$$T(\mu, x, z) = \frac{d}{dx} \ln \left[ x^{-2(\mu-1)} F_\mu(x) \right] = \frac{2}{\mu} \left( \frac{\mu}{x} \right) \frac{1 + z - \left( \frac{\mu}{x} \right)^2 z + 2d_\mu(x) + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{\mu}{x} \right)^2 z d_\mu^2(x)}{1 + \left( \frac{\mu}{x} \right)^2 + \frac{2}{\mu} \left( \frac{\mu}{x} \right)^2 z + \frac{2}{\mu} \left( \frac{\mu}{x} \right)^2 d_\mu(x) + \frac{2}{\mu^2} \left( \frac{\mu}{x} \right)^2 z d_\mu(x) + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{\mu}{x} \right)^2 d_\mu^2(x)}, \quad (4.40)$$

donde  $d_\mu(x) = x \frac{d}{dx} \ln I_\mu(x)$ . Esta expresión puede ser desarrollada en potencias de  $\frac{1}{\mu}$ , mediante el uso de la expansión de Debye de las funciones de Bessel, después de tomar  $\left( \frac{\mu}{x} \right) = \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}$ , con  $\tau$  la variable de los polinomios recursivos  $u_k(\tau)$  [61].

Si  $D^{(N)}(\mu, x, \tau, z)$  es tal expansión hasta el orden  $\frac{1}{\mu^N}$ , la función zeta parcial puede ser escrita como

$$\zeta_\mu(s) = \zeta_\mu^a(s) + \zeta_\mu^d(s), \quad (4.41)$$

donde

$$\zeta_\mu^a(s) = 2 \frac{\sin \pi s}{\pi} R^{2s} \int_z^\infty dx [x^2 - z^2]^{-s} \left[ T(\mu, x, z) - D^{(N)}(\mu, x, \tau, z) \right] \quad (4.42)$$

es la parte analítica de la función zeta para  $s = -\frac{1}{2}$ , mientras que

$$\zeta_\mu^d(s) = 2 \frac{\sin \pi s}{\pi} R^{2s} \int_z^\infty dx [x^2 - z^2]^{-s} D^{(N)}(\mu, x, \tau, z) \quad (4.43)$$

es la contribución asintótica.

Para hacer absolutamente convergentes la integral y la suma sobre  $\nu$  en la ecuación (4.42) en  $s = -\frac{1}{2}$ , es necesario tomar  $N \geq 2$  [60]. Elegiremos  $N = 4$  para mejorar la convergencia de la suma del término analítico (4.42), de modo de ganar precisión en los resultados numéricos.

Ahora bien, el término entre corchetes en las ecuaciones (4.36) y (4.37) involucra la combinación  $\zeta_{\nu+\alpha}(s) + \zeta_{\nu-\alpha}(s)$ . Para usar resultados previos [55], desarrollamos en potencias de  $\frac{1}{\nu}$ . Introducimos la correspondiente combinación de expansiones asintóticas,

$$\begin{aligned} \Delta^{(N)}(\nu, x, t, z) = & D^{(N)} \left( \nu \left( 1 + \frac{\alpha}{\nu} \right), x, t \left( 1 + \frac{\alpha}{\nu} \right) \left[ 1 + \frac{2\alpha t^2}{\nu} \left( 1 + \frac{\alpha}{2\nu} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, z \right) + \\ & D^{(N)} \left( \nu \left( 1 - \frac{\alpha}{\nu} \right), x, t \left( 1 - \frac{\alpha}{\nu} \right) \left[ 1 - \frac{2\alpha t^2}{\nu} \left( 1 - \frac{\alpha}{2\nu} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, z \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

desarrollada hasta el orden  $\frac{1}{\nu^N}$ . En la expresión de arriba  $t = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+x^2}}$ .

Se puede escribir la expansión asintótica como

$$\Delta^{(N)}(\nu, x, t, z) = \Delta_{-1} + \Delta_0 + \sum_{i=1}^N \Delta_i, \quad (4.45)$$

donde

$$\Delta_{-1} = \frac{4x}{\nu} \frac{t}{1+t}, \quad \Delta_0 = \frac{2x}{\nu^2} \frac{t^2}{1+t}, \quad \Delta_i = \frac{1}{\nu^i} \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{2i} b_{(i,j)} t^{i+j}. \quad (4.46)$$

y los coeficientes  $b_{(i,j)}$  están calculados en el Apéndice C.

Por lo tanto, el término entre corchetes en las ecuaciones (4.36) y (4.37) puede ser escrito como

$$\lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} M^{2s} \sum_{n=0}^{\infty} [\zeta_{\nu+\alpha}(s) + \zeta_{\nu-\alpha}(s)] = Z\left(-\frac{1}{2}\right) + \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} M^{2s} \left( A_{-1}(s) + A_0(s) + \sum_{i=1}^{N-1} A_i(s) \right), \quad (4.47)$$

donde

$$Z\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\pi MR} \sum_{n=0}^{\infty} \int_z^{\infty} dx [x^2 - (z)^2]^{\frac{1}{2}} \left\{ T(\nu + \alpha, x, z) + T(\nu - \alpha, x, z) - \Delta^{(N)}(\nu, x, t, z) \right\}, \quad (4.48)$$

$$A_{-1}(s) = 2 \frac{\sin \pi s}{\pi} R^{2s} 4 \sum_{n=0}^{\infty} \nu \int_{\frac{z}{\nu}}^{\infty} dx [(\nu x)^2 - z^2]^{-s} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, \quad (4.49)$$

$$A_0(s) = 2 \frac{\sin \pi s}{\pi} R^{2s} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{z}{\nu}}^{\infty} dx [(\nu x)^2 - z^2]^{-s} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, \quad (4.50)$$

$$A_i(s) = 2 \frac{\sin \pi s}{\pi} R^{2s} \sum_{j=0}^{2i} b_{(i,j)} \sum_{n=0}^{\infty} \nu^{-i} \int_{\frac{z}{\nu}}^{\infty} dx [(\nu x)^2 - z^2]^{-s} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)^{i+j}. \quad (4.51)$$

Las ecuaciones (4.49), (4.50) y (4.51) pueden ser expresadas en una forma sistemática introduciendo las funciones [55]

$$f(s; a, b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu^a \left[ 1 + \left( \frac{\nu}{x} \right)^2 \right]^{-s-b}, \quad (4.52)$$

estudiadas más detalladamente en el Apéndice D, que permiten escribir las contribuciones asintóticas como

$$A_{-1}(s) = \frac{2R^{2s}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)} z^{-2s+1} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} f\left(s; 0, -\frac{1}{2}; z\sqrt{y}\right), \quad (4.53)$$

$$A_0(s) = \frac{2R^{2s}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)} z^{-2s-1} \int_0^1 \frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} f\left(s; 1, \frac{1}{2}; z\sqrt{y}\right), \quad (4.54)$$

$$A_i(s) = \sum_{j=0}^{2i} b_{(i,j)} \mathcal{A}_{(i,j)}(s), \quad (4.55)$$

donde

$$\mathcal{A}_{(i,j)}(s) = -2R^{2s} z^{-(i+j)} \frac{\Gamma\left(s + \frac{i+j}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+j}{2}\right) \Gamma(s)} z^{-2s} f\left(s; j, \frac{i+j}{2}; z\right). \quad (4.56)$$

En el Apéndice E se derivan las expresiones completas para estas contribuciones asintóticas alrededor de  $s = -\frac{1}{2}$ . Aquí, simplemente damos una lista de los residuos, que serán relevantes para la discusión de la renormalización:

$$\text{Res}|_{s=-\frac{1}{2}} A_{-1} = 0, \quad (4.57)$$

$$\text{Res}|_{s=-\frac{1}{2}} A_0 = \frac{1}{R} \left[ \frac{z^2}{\pi} + \frac{1}{12\pi} \right], \quad (4.58)$$

$$\text{Res}|_{s=-\frac{1}{2}} A_1 = 0, \quad (4.59)$$

$$\text{Res}|_{s=-\frac{1}{2}} A_2 = \frac{1}{R} \left[ \frac{1}{64} - \frac{1}{12\pi} - \frac{\alpha^2}{\pi} - \frac{z}{4} + \frac{z}{\pi} - \frac{z^2}{2} \right]. \quad (4.60)$$

Estudiamos ahora la contribución de la zeta parcial

$$e_c = -\frac{1}{2} M \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} M^{2s} \left[ -\zeta_{\frac{1}{2}-\alpha}(s) \right] \quad (4.61)$$

a la energía de Casimir en las ecuaciones (4.36) y (4.37). Omitimos el valor absoluto en el índice por las razones explicadas anteriormente.

Para aislar las singularidades es suficiente considerar los tres primeros términos dominantes en la expansión asintótica para grandes argumentos de las funciones de Bessel, que serán denotados por  $L\left(\frac{1}{2} - \alpha, x, z\right)$ ; entonces, podemos escribir la función zeta parcial como

$$\zeta_{\frac{1}{2}-\alpha}(s) = \zeta_{\frac{1}{2}-\alpha}^a(s) + \zeta_{\frac{1}{2}-\alpha}^d(s), \quad (4.62)$$

donde

$$\zeta_{\frac{1}{2}-\alpha}^a(s) = 2 \frac{\sin \pi s}{\pi} R^{2s} \int_z^\infty dx [x^2 - z^2]^{-s} \times \left[ T\left(\frac{1}{2} - \alpha, x, z\right) - L\left(\frac{1}{2} - \alpha, x, z\right) \right], \quad (4.63)$$

$$\zeta_{\frac{1}{2}-\alpha}^d(s) = 2 \frac{\sin \pi s}{\pi} R^{2s} \int_z^\infty dx [x^2 - z^2]^{-s} L\left(\frac{1}{2} - \alpha, x, z\right). \quad (4.64)$$

Ahora, los términos sustraídos pueden ser escritos como

$$L\left(\frac{1}{2} - \alpha, x, z\right) = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2, \quad (4.65)$$

donde

$$\delta_0 = 2, \quad \delta_1 = \frac{1}{x} 2\alpha, \quad \delta_2 = \frac{1}{x^2} (\alpha^2 - z). \quad (4.66)$$

Por lo tanto

$$\lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} M^{2s} \zeta_{\frac{1}{2}-\alpha}(s) = z\left(-\frac{1}{2}\right) + \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} M^{2s} (a_0(s) + a_1(s) + a_2(s)), \quad (4.67)$$

con

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\pi MR} \int_z^\infty dx [x^2 - z^2]^{\frac{1}{2}} \left\{ T\left(\frac{1}{2} - \alpha, x, z\right) - L\left(\frac{1}{2} - \alpha, x, z\right) \right\}, \quad (4.68)$$

que será evaluada numéricamente, y

$$a_0(s) = \frac{1}{R} \left[ \frac{z^2}{\pi} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)} - \frac{z^2}{\pi} \left[ 1 + 2 \log\left(\frac{z}{2R}\right) \right] + O\left(s + \frac{1}{2}\right) \right], \quad (4.69)$$

$$a_1(s) = \frac{1}{R} \left[ 2\alpha z + O\left(s + \frac{1}{2}\right) \right], \quad (4.70)$$

$$a_2(s) = \frac{1}{R} (\alpha^2 - z) \left\{ -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\pi} \left[ 2 + 2 \log\left(\frac{z}{2R}\right) \right] + O\left(s + \frac{1}{2}\right) \right\}. \quad (4.71)$$

Los residuos en  $s = -\frac{1}{2}$  están entonces dados por

$$\text{Res}_{|s=-\frac{1}{2}} a_0 = \frac{1}{R} \left[ \frac{z^2}{\pi} \right], \quad (4.72)$$

$$\text{Res}_{|s=-\frac{1}{2}} a_1 = 0, \quad (4.73)$$

$$\text{Res}_{|s=-\frac{1}{2}} a_2 = \frac{1}{R} \left[ -\frac{\alpha^2}{\pi} + \frac{z}{\pi} \right]. \quad (4.74)$$

La energía de Casimir es claramente divergente y usando las ecuaciones (4.57) a (4.60) y (4.72) a (4.74) en las ecuaciones (4.36) y (4.37), se obtiene el residuo total, que está dado por

$$\text{Res}_{|s=-\frac{1}{2}} E_C = -\frac{1}{2R} \left\{ \frac{1}{64} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{2} \right\}, \quad (4.75)$$

que resulta independiente del flujo. Por lo tanto, la diferencia entre energías de Casimir con flujo arbitrario y con flujo entero es finita y contiene la información relevante sobre el efecto del campo de background.

En la figura 4.1 graficamos, para diferentes valores de  $z$ , la diferencia adimensional  $E_d = R(E_C(a) - E_C(0))$  para un comportamiento de tipo I en el origen, como función de  $a$  (la parte fraccionaria del flujo reducido). Ya que la parte finita de la energía de Casimir es continua en  $a$ , la diferencia va a cero tanto en  $a = 0$  como en  $a = 1$ . Muestra un mínimo en  $a = \frac{1}{2}$  y un salto en la derivada en ese mismo punto. Este salto puede ser atribuido a  $a_1(s)$  (ecuación (4.70)) que, efectivamente, contiene el valor absoluto  $|\alpha|$  (ver el comentario abajo de la ecuación (4.37)). Es interesante notar

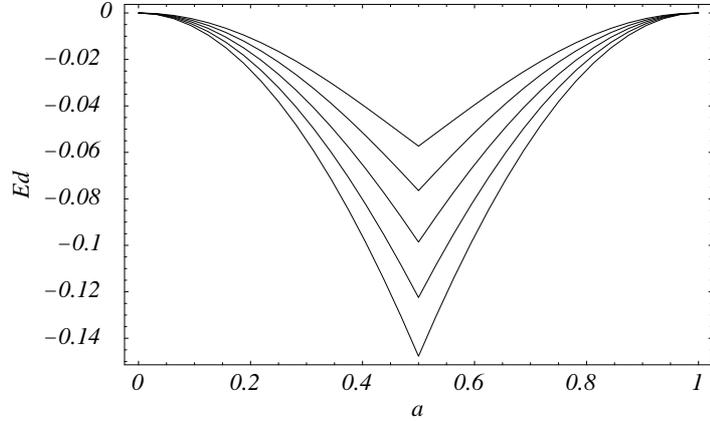


Figure 4.1: Diferencia  $E_d$  de energías de Casimir. Comportamiento I en el origen. De arriba a abajo:  $z = \frac{1}{128}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}$ .

que, alrededor de  $a = 0$ , la energía de vacío decrece cuando el flujo crece, y que este efecto está más marcado para valores crecientes de la masa.

La misma diferencia es graficada en la figura 4.2 para un comportamiento tipo II en el origen. Para valores decrecientes de la masa, nuestras curvas tienden al resultado  $m = 0$  de la referencia [50]; ya  $z = \frac{1}{128}$  muestra bastante buen acuerdo con la correspondiente figura en esa referencia (excepto por un factor 2, debido al hecho de que los autores de [50] consideraron una sola polarización).

Mientras que para pequeños valores de la masa la energía muestra un mínimo en  $a \neq 0$ , para grandes valores de  $m$  este mínimo se corre hacia  $a = 0$ . Más aún, para  $m \neq 0$  el límite de la energía para  $a \rightarrow 0^+$  es distinto de cero. Esto es debido al comportamiento discontinuo de la parte finita de la energía de vacío, más precisamente de la contribución del subespacio crítico, a valores enteros del flujo.

El origen de esta discontinuidad puede ser adjudicado a la aparición, para  $a \rightarrow 0^+$ , de una raíz de la combinación de funciones de Bessel involucradas en la zeta parcial  $\zeta_a$ . Tal raíz está ausente cuando  $a = 0$ . Para  $a \rightarrow 0^+$ , esta raíz va a cero y, por lo tanto, da lugar a un gap, que es igual a  $m$ . En la figura 4.3 se muestra la cantidad  $J_a^2(kR) - J_{a-1}^2(kR) - \frac{2m}{k} J_a(kR) J_{a-1}(kR)$  como una función de  $kR$ , para varios valores de  $a$  (el objetivo de esta figura es aclarar el origen del comportamiento discontinuo de la energía a valores enteros de  $a$ ).

Resumiendo, hemos visto que la presencia de la masa tanto como la elección de la extensión autoadjunta del Hamiltoniano tienen una considerable influencia en la dependencia de la energía de Casimir con el flujo. Aunque esto podría parecer sorprendente, se debe recordar que diferentes valores de  $\Theta$  describen una situación física diferente. Por ejemplo, la ecuación (4.12) surge de imponer condiciones APS a un radio finito que es después llevado a cero. La ecuación (4.13) surge cuando se considera un tubo

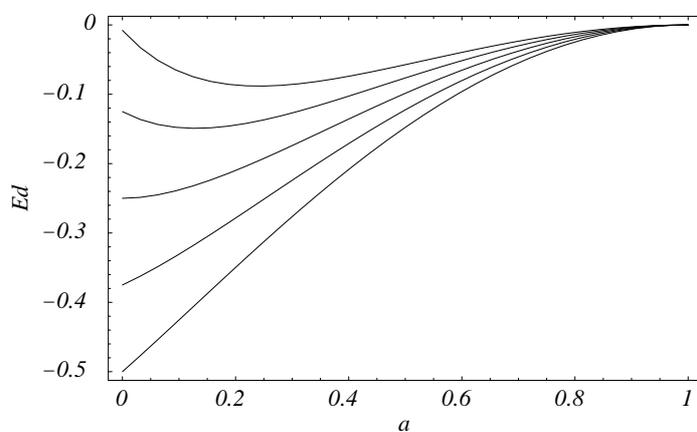


Figure 4.2: Diferencia  $E_d$  de energías de Casimir. Comportamiento II en el origen. De arriba a abajo:  $z = \frac{1}{128}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}$ .

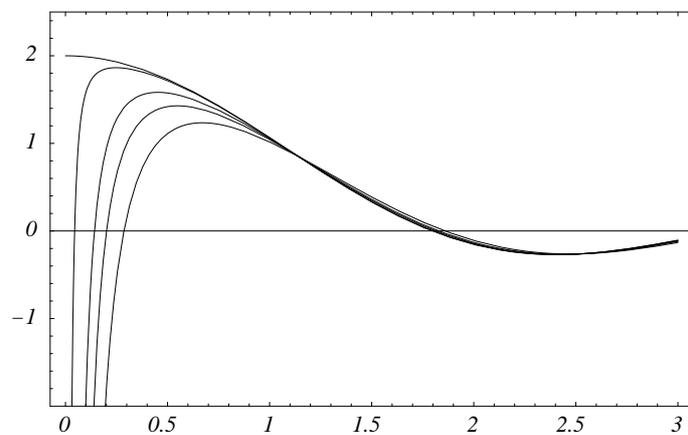


Figure 4.3:  $J_a^2(kR) - J_{a-1}^2(kR) - \frac{2m}{k} J_a(kR) J_{a-1}(kR)$ . De arriba a abajo:  $a = 0, 0.001, 0.01, 0.02$

de flujo de radio finito sin ninguna física (potencial) dentro del tubo y luego se toma el límite del radio yendo a cero. Cuando un potencial está presente dentro del tubo, en el límite del radio yendo a cero, podría surgir una extensión autoadjunta diferente. Dado el hecho de que diferentes extensiones autoadjuntas surgen de diferentes situaciones físicas, la dependencia de la energía de Casimir con  $\Theta$  es esperable. Esta dependencia ya ha sido observada al considerar secciones eficaces de scattering [27, 33].

Como consecuencia de la masa, en el caso de la extensión autoadjunta (4.13), se encontró una discontinuidad en la energía. Sería interesante ver cómo surge este efecto, empezando con un tubo de radio finito [30], y luego llevando este radio a cero. Uno se pregunta si este efecto persiste o si es sólo consecuencia del vórtice singular. La misma pregunta se mantiene para el salto en la derivada de la energía de Casimir que aparece para todas las masas  $m$  en el caso I y para  $m = 0$  en el caso II. Creemos que en todos los casos la situación idealizada de un flujo singular es el origen de este comportamiento; esta conjetura está basada en el hecho de que ninguna de estas características fue observada en los estudios previos de casos no singulares [54, 62] en los que, sin embargo, no había bordes presentes.

---

---

# CHAPTER 5

---

## Acción efectiva para la Electrodinámica Cuántica

### 5.1 Cálculo de acciones efectivas mediante la función $\zeta$

En el contexto de la integral funcional, el cálculo a un loop de la acción efectiva euclídea de una determinada teoría involucra la evaluación de determinantes funcionales de operadores diferenciales. Ya que el problema de autovalores de un operador define, por lo general, una sucesión no acotada, resulta necesario el uso de métodos de regularización para la extracción de resultados finitos a partir de cantidades divergentes. El método de la función  $\zeta$  [4, 14] ha mostrado ser útil en diversas aplicaciones.

Como ya hemos señalado (ver Capítulo 1.1), para un operador diferencial  $A$  fuertemente elíptico y normal, definido en una variedad compacta y sin borde, la función zeta generalizada puede escribirse, a partir de los autovalores del operador, como

$$\zeta(s) = \text{tr}(A^{-s}) = \sum_n \lambda_n^{-s}.$$

Dado que los autovalores del operador crecen sin límite, esta suma sólo es convergente para  $\Re(s) > \frac{d}{m}$  (donde  $d$  es la dimensión de la variedad y  $m$  es el orden del operador). Sin embargo, en la región de convergencia, define una función holomorfa y puede ser extendida analíticamente a todo el plano como una función meromorfa de  $s$ .

La derivada de la  $\zeta$  en  $s = 0$  es, por lo tanto, formalmente igual a  $-\sum_n \log(\lambda_n)$ . Uno puede entonces definir

$$\det(A) = \exp\left(-\frac{d\zeta}{ds}\Big|_{s=0}\right).$$

En lo que sigue, aplicaremos la técnica de la función  $\zeta$  a la determinación de la acción efectiva para campos de Dirac masivos en el background de un campo electromagnético constante.

## 5.2 Acción efectiva para campos electromagnéticos constantes [63]

En QED, el Lagrangiano efectivo a un loop describe la interacción efectiva no lineal de los campos electromagnéticos debido a un solo loop fermiónico. En dos dimensiones, su forma general ha sido obtenida tanto a través de regularización de tiempo propio como mediante función  $\zeta$  [64, 65]. En cuatro dimensiones, en cambio, sólo han sido estudiadas configuraciones particulares del campo electromagnético.

El problema 3 + 1 dimensional de campos electromagnéticos constantes fue estudiado primero por Euler y Heisenberg [66] e, independientemente, por Weisskopf [67]. Estos autores obtuvieron una expresión integral implícita para el Lagrangiano efectivo a un loop en el marco de la teoría de electrón-agujero. Más tarde, Schwinger reobtuvo esta representación integral en el marco de la teoría de campos, usando técnicas de tiempo propio [68].

En todas estas referencias, se derivaron resultados explícitos en ciertos límites, siendo el más famoso el de campo débil. Estas y otras intensidades particulares del campo fueron estudiadas posteriormente (ver por ejemplo [69, 70, 71]).

Más recientemente, se renovó el interés en este tema, y la acción efectiva euclídea para configuraciones de campo de background electromagnético constante fue estudiada a través de técnicas de función  $\zeta$  [4, 14]: En la referencia [72] se obtuvieron expresiones analíticas para el caso de campos puramente magnéticos en cualquier número de dimensiones. En el mismo trabajo, se estudió también el caso de campos magnético y eléctrico iguales en cuatro dimensiones euclídeas. En [73], se avanzó hacia configuraciones de campos más generales, y los autores obtuvieron el Lagrangiano efectivo como una serie de potencias en  $\frac{B}{E}$ . Sin embargo, como ya se recaló en [73], se necesita un conocimiento no perturbativo de la parte imaginaria del Lagrangiano para determinar, por ejemplo, el rate de creación de pares.

En este capítulo obtendremos, mediante el método de la función  $\zeta$ , una expresión explícita para la acción efectiva completa a un loop de la Electrodinámica Cuántica en cuatro dimensiones, en el caso de campos electromagnéticos constantes, pero por lo demás arbitrarios.

Trabajaremos en espacio-tiempo euclídeo, y consideraremos la compactificación de  $\mathbb{R}^4$ , por ejemplo, a  $S^4$ . Definiremos el determinante del operador de Dirac relevante  $\mathcal{D}$  mediante la derivada de la función  $\zeta$  de  $\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}$ .

Estudiamos la acción efectiva para partículas de Dirac masivas en presencia de un campo de background electromagnético uniforme, pero de magnitud arbitraria. La acción efectiva en la aproximación de un loop está dada por

$$S_{eff}[A_\mu] = S_{cl}[A_\mu] - \log Det(\mathcal{D}[A_\mu]) , \quad (5.1)$$

donde  $S_{cl}[A_\mu]$  es la acción euclídea clásica y  $\mathcal{D}[A_\mu] = \gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + im$  es el operador de Dirac euclídeo;  $m$  es la masa fermiónica. Este operador, si bien no es autoadjunto, es normal ( $[\mathcal{D}, \mathcal{D}^\dagger] = 0$ ). Por lo tanto, para definir el determinante funcional usaremos el operador  $\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}$ , que resulta autoadjunto y elíptico.

De esta forma, el determinante funcional que aparece en la corrección a un loop a la acción clásica, definido a través de la regularización de la función  $\zeta$  [4, 14], conduce a

$$S_{eff}[A_\mu] = S_{cl}[A_\mu] + S^{(1)}[A_\mu] = S_{cl}[A_\mu] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \zeta(s; \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}) \Big|_{s=0}. \quad (5.2)$$

Para evaluar la corrección a un loop  $S^{(1)}$  en la expresión previa, es necesario obtener el espectro del operador  $\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}$ , el cual es bien conocido en el caso de campos uniformes [74]. En esta situación particular, uno siempre puede elegir un sistema de referencia tal que  $F_{03} = -F_{30} = E$  y  $F_{12} = -F_{21} = B$ , mientras que las restantes componentes del tensor de campo son nulas. Con esta elección, la función zeta requerida resulta

$$\begin{aligned} \zeta(s; \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}) = \mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} & \left[ 2 \sum_{n_a=1}^{\infty} (2n_a a + c)^{-s} + 2 \sum_{n_b=1}^{\infty} (2n_b b + c)^{-s} + \right. \\ & \left. 4 \sum_{n_a=1}^{\infty} \sum_{n_b=1}^{\infty} (2n_a a + 2n_b b + c)^{-s} + c^{-s} \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Aquí,  $a = \frac{e|E|}{\mu^2}$ ,  $b = \frac{e|B|}{\mu^2}$ ,  $c = \frac{m^2}{\mu^2}$ , y  $\mu$  es un parámetro con dimensión de masa, introducido con el fin de adimensionalizar la función  $\zeta$ . Debe notarse que las series en la ecuación (5.3) son todas convergentes para  $\Re s > 2$ , donde definen una función holomorfa de  $s$ .

Realizamos ahora la extensión analítica de la función  $\zeta$  que estamos tratando, alrededor de  $s = 0$ , de tal forma que nos permita comparar nuestro resultado general con los casos conocidos que corresponden a  $b = 0$  y  $a = b$ .

Los dos primeros términos en la ecuación (5.3) pueden ser escritos en términos de funciones zeta de Hurwitz, que son funciones meromorfas con un único polo simple en  $s = 1$ . Por su parte, el tercer término es una función zeta del tipo de Barnes [75, 76] (ver también [77, 78] y referencias allí).

Para extender analíticamente este término, lo escribimos en su forma integral. Después de hacer esto, obtenemos

$$\begin{aligned} \zeta(s; \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}) = \mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} & \left\{ \frac{2}{(2a)^s} \zeta\left(s, \frac{c}{2a} + 1\right) + \frac{2}{(2b)^s} \zeta\left(s, \frac{c}{2b} + 1\right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \frac{4e^{-2at} e^{-2bt} e^{-ct}}{(1 - e^{-2at})(1 - e^{-2bt})} + c^{-s} \right\} = \\ & A(s) + B(s) + C(s) + D(s), \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde  $\zeta(s, v)$  es una función zeta de Hurwitz [9]. Esta expresión está, en principio, bien definida para  $\Re s > 2$ .

El término  $C(s)$  en la ecuación (5.4), que es simétrico en  $a$  y  $b$ , puede escribirse en una forma más conveniente

$$C(s) = 4\mu^4\Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \frac{e^{-2at} e^{-2bt} e^{-ct}}{(1 - e^{-2at})^2} + 4\mu^4\Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \frac{e^{-2at} e^{-2bt} e^{-ct} (e^{-2bt} - e^{-2at})}{(1 - e^{-2at})^2 (1 - e^{-2bt})} = C_1(s) + C_2(s), \quad (5.5)$$

donde el segundo término se anula para  $a = b$ . El primer término puede ser integrado en una forma directa, y da

$$C_1(s) = 4\mu^4\Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{1}{(2a)^s} \left( \zeta \left( s-1, \frac{c+2b}{2a} \right) - \frac{c+2b}{2a} \zeta \left( s, \frac{c+2b}{2a} \right) \right). \quad (5.6)$$

Para trabajar con  $C_2(s)$  en la ecuación (5.5), usamos el desarrollo

$$\frac{1}{e^{bt} - e^{-bt}} = \frac{1}{2bt} + bt \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(bt)^2 + (k\pi)^2}, \quad (5.7)$$

de esta forma obtenemos

$$C_2(s) = 2\mu^4\Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{1}{b} \int_0^\infty dt t^{s-2} \frac{e^{-(2a+b+c)t} (e^{-2bt} - e^{-2at})}{(1 - e^{-2at})^2} + 4\mu^4\Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{1}{\Gamma(s)} b \int_0^\infty dt t^s \frac{e^{-(2a+b+c)t} (e^{-2bt} - e^{-2at})}{(1 - e^{-2at})^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(bt)^2 + (k\pi)^2} = C_2^1(s) + C_2^2(s). \quad (5.8)$$

Fácilmente se encuentra que el primer término  $C_2^1(s)$  es

$$C_2^1(s) = 2\mu^4\Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{1}{b} \frac{1}{(s-1)(2a)^{s-1}} \left\{ \zeta \left( s-2, \frac{c+3b}{2a} \right) - \frac{c+3b}{2a} \zeta \left( s-1, \frac{c+3b}{2a} \right) - \zeta \left( s-2, \frac{c+b+2a}{2a} \right) + \frac{c+b+2a}{2a} \zeta \left( s-1, \frac{c+b+2a}{2a} \right) \right\}. \quad (5.9)$$

Como todos los términos que hemos extendido analíticamente hasta este punto,  $C_2^2(s)$  involucra una integral que diverge en  $s = 0$ . Para aislar esta singularidad, reescribimos este término como

$$C_2^2(s) = 4\mu^4\Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{1}{\Gamma(s)} b \int_0^\infty dt t^s \frac{e^{-(2a+b+c)t} (e^{-2bt} - e^{-2at})}{(1 - e^{-2at})^2} \times$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[ \frac{1}{(bt)^2 + (k\pi)^2} - \frac{1}{(k\pi)^2} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k\pi)^2} \right\} =$$

$$\text{CF}_2^2(s) + \text{CD}_2^2(s). \quad (5.10)$$

La integral que aparece en  $\text{CD}_2^2(s)$  es divergente en  $s = 0$  pero, después de realizar la suma, puede ser trivialmente extendida para dar

$$\text{CD}_2^2(s) = -4\mu^4\Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{b}{12} \frac{s}{(2a)^{s+1}} \left\{ \zeta \left( s, \frac{c+3b}{2a} \right) - \frac{c+3b}{2a} \zeta \left( s+1, \frac{c+3b}{2a} \right) - \right.$$

$$\left. \zeta \left( s, \frac{c+b+2a}{2a} \right) + \frac{c+b+2a}{2a} \zeta \left( s+1, \frac{c+b+2a}{2a} \right) \right\}. \quad (5.11)$$

Por su parte,  $\text{CF}_2^2(s)$ , puede ser reescrito como

$$\text{CF}_2^2(s) = 4\mu^4\Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{1}{\Gamma(s)} b^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k\pi)^2} \times$$

$$\int_0^{\infty} dt t^{s+2} \frac{e^{-(2a+b+c)t} (e^{-2bt} - e^{-2at})}{(1 - e^{-2at})^2} \frac{1}{(bt)^2 + (k\pi)^2}. \quad (5.12)$$

Como se ve fácilmente, esta integral converge para  $\Re s > -2$ . De esta forma, hemos obtenido una extensión analítica para la  $\zeta$  del operador como una función meromorfa, presentando sólo polos simples. Esta extensión es válida para  $\Re s > -2$ . Mediante una manipulación algebraica directa (ver Apéndice F), se puede llevar  $\text{CF}_2^2(s)$  a la forma

$$\text{CF}_2^2(s) = -2i\mu^4\Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{\Gamma(s+3)}{\Gamma(s)} b^{-s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k\pi)^{1-s}} \sum_{l=0}^{\infty} l \times$$

$$\left[ \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}s} e^{i\frac{k\pi}{b}(2al+c+3b)} \Gamma \left( -s-2, i(2al+c+3b)\frac{k\pi}{b} \right) - C.C. \right\} - \right.$$

$$\left. \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}s} e^{i\frac{k\pi}{b}(2al+c+b+2a)} \Gamma \left( -s-2, i(2al+c+b+2a)\frac{k\pi}{b} \right) - C.C. \right\} \right], \quad (5.13)$$

donde  $\Gamma(s, v)$  es una función Gamma incompleta [61].

Esta última forma resultará muy útil a nivel de la acción efectiva, en particular, al estudiar el límite de campo débil para chequear el acuerdo con la acción efectiva euclídea de Euler-Heisenberg [66], obtenida en [66, 68].

Antes de pasar al cálculo de la acción efectiva, mostraremos el acuerdo de nuestra función  $\zeta$  general con los resultados obtenidos para ciertos casos particulares: el caso de campo eléctrico o magnético nulo [72, 73] y el caso de campos eléctrico y magnético iguales [72].

Empezamos con el límite  $a = b$ . En este caso, los diferentes términos en la ecuación (5.4) adoptan una forma muy simplificada. De hecho, en esta situación

$$A(s) = B(s) = 2\mu^4\Omega \frac{a^2}{4\pi^2} \frac{1}{(2a)^s} \zeta\left(s, \frac{c}{2a} + 1\right). \quad (5.14)$$

En lo que respecta a  $C(s)$ , sólo permanece la contribución de  $C_1(s)$ , que conduce a

$$C(s) = 4\mu^4\Omega \frac{a^2}{4\pi^2} \frac{1}{(2a)^s} \left( \zeta\left(s-1, \frac{c+2a}{2a}\right) - \frac{c+2a}{2a} \zeta\left(s, \frac{c+2a}{2a}\right) \right), \quad (5.15)$$

y cancela parcialmente la contribución que viene de  $A(s) + B(s)$ . Finalmente, reuniendo todos estos términos, usando la relación  $\zeta(s, v+1) = \zeta(s, v) - v^{-s}$ , y adicionando  $D(s)$  obtenemos

$$\zeta(s, \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D})|_{a=b} = 4\mu^4\Omega \frac{a^2}{4\pi^2} \frac{1}{(2a)^s} \left( \zeta\left(s-1, \frac{c}{2a}\right) - \frac{c}{2a} \zeta\left(s, \frac{c}{2a}\right) \right) + \mu^4\Omega \frac{a^2}{4\pi^2} c^{-s}. \quad (5.16)$$

Esta expresión coincide con el resultado dado en la referencia [72].

Estudiamos ahora el límite  $B \rightarrow 0$ . Fácilmente se ve que  $\lim_{b \rightarrow 0} A(s) = 0$ . Con respecto al  $\lim_{b \rightarrow 0} B(s)$ , puede ser estudiado usando la expansión asintótica para la función  $\zeta$  de Hurwitz (la que está deducida, por ejemplo en [9]):

$$\zeta(s, v) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ v^{1-s} \Gamma(s-1) + \frac{1}{2} v^{-s} \Gamma(s) + \sum_{n=1}^N B_{2n} \frac{\Gamma(s+2n-1)}{(2n)!} v^{1-s-2n} \right\} + O(v^{-2N-s-1}), \quad (5.17)$$

que da

$$\lim_{b \rightarrow 0} B(s) = \lim_{b \rightarrow 0} \left\{ \mu^4\Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{2}{(2b)^s} \frac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s)} \left( \frac{c}{2b} + 1 \right)^{1-s} \right\} = \frac{\mu^4\Omega}{4\pi^2} \frac{a}{s-1} c^{1-s}. \quad (5.18)$$

La única contribución a  $C(s)$  en este límite viene de  $C_2^1(s)$ , y es

$$\lim_{b \rightarrow 0} C(s) = \frac{\mu^4\Omega}{4\pi^2} \frac{(2a)^{2-s}}{s-1} \left\{ \zeta\left(s-1, \frac{c}{2a}\right) - \left( \frac{c}{2a} \right)^{1-s} \right\}. \quad (5.19)$$

Finalmente,  $D(s)$  se anula para  $b = 0$ . Entonces, reemplazando todos estos resultados parciales en la ecuación (5.4), se obtiene

$$\zeta(s, \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D})|_{b=0} = \frac{\mu^4\Omega}{4\pi^2} \frac{(2)^{1-s}}{s-1} a^{2-s} \left\{ 2\zeta\left(s-1, \frac{c}{2a}\right) - \left( \frac{c}{2a} \right)^{1-s} \right\}, \quad (5.20)$$

que está en completo acuerdo con resultados previos obtenidos en [73, 72].

Por supuesto, el límite  $E \rightarrow 0$ , da una expresión análoga, que se obtiene cambiando  $a \rightarrow b$  en la ecuación (5.20).

Calcularemos ahora la acción efectiva euclídea a un loop. De acuerdo con la ecuación (5.2), para obtener este resultado, uno debe calcular las derivadas en  $s = 0$  de los varios términos en la ecuación (5.4).

Comenzamos con  $A(s)$ , que contribuye con

$$\left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} A(s) \right|_{s=0} = \mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} \left\{ \log(2a) \left( \frac{1}{2} + \frac{c}{2a} \right) + \log \Gamma\left(\frac{c}{2a} + 1\right) - \frac{1}{2} \log(2\pi) \right\}. \quad (5.21)$$

En forma análoga

$$\left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} B(s) \right|_{s=0} = \mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} \left\{ \log(2b) \left( \frac{1}{2} + \frac{c}{2b} \right) + \log \Gamma\left(\frac{c}{2b} + 1\right) - \frac{1}{2} \log(2\pi) \right\}. \quad (5.22)$$

A través de un cálculo directo se tiene

$$\begin{aligned} & \left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} C_1(s) \right|_{s=0} = \\ & 2\mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} \left\{ -\log(2a) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{c+2b}{2a} \right)^2 - \frac{1}{12} \right] + \left. \frac{\partial}{\partial s} \zeta \left( s-1, \frac{c+2b}{2a} \right) \right|_{s=0} - \right. \\ & \left. \left( \frac{c+2b}{2a} \right) \log \left( \Gamma \left( \frac{c+2b}{2a} \right) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{c+2b}{2a} \right) \log(2\pi) \right\}, \quad (5.23) \\ & \left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} C_2^1(s) \right|_{s=0} = 2\mu^4 \Omega \frac{a^2}{4\pi^2} \left\{ (\log(2a) - 1) \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{c+3b}{2a} \right)^3 - \frac{1}{12} \left( \frac{c+3b}{2a} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{6} \left( \frac{c+b+2a}{2a} \right)^3 + \frac{1}{12} \left( \frac{c+b+2a}{2a} \right) \right] - \right. \\ & \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. \frac{\partial}{\partial s} \zeta \left( s-2, \frac{c+3b}{2a} \right) \right|_{s=0} + \left( \frac{c+3b}{2a} \right) \frac{\partial}{\partial s} \zeta \left( s-1, \frac{c+3b}{2a} \right) \right|_{s=0} + \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. \frac{\partial}{\partial s} \zeta \left( s-2, \frac{c+b+2a}{2a} \right) \right|_{s=0} - \left( \frac{c+b+2a}{2a} \right) \frac{\partial}{\partial s} \zeta \left( s-1, \frac{c+b+2a}{2a} \right) \right|_{s=0} \right\}, \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. \right\}, \right. \right. \right. \right. \end{aligned} \quad (5.24)$$

y

$$\begin{aligned} & \left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} CD_2^2(s) \right|_{s=0} = -\mu^4 \Omega \frac{b^2}{48\pi^2} \left\{ (\log(2a) + 1) \left( \frac{b-a}{a} \right) + \right. \\ & \left. \left( \frac{c+3b}{2a} \right) \psi \left( \frac{c+3b}{2a} \right) - \left( \frac{c+b+2a}{2a} \right) \psi \left( \frac{c+b+2a}{2a} \right) \right\}. \quad (5.25) \end{aligned}$$

En cuanto a  $CF_2^2(s)$ , debido a la presencia de  $\Gamma(s)$  en el denominador, la derivada requerida se reduce a  $\Gamma(s) CF_2^2(s)$  en  $s = 0$ , por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} CF_2^2(s) \right|_{s=0} &= -4i\mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \sum_{l=0}^{\infty} l \times \\ &\left[ \left\{ e^{i\frac{k\pi}{b}(2al+c+3b)} \Gamma\left(-2, i(2al+c+3b)\frac{k\pi}{b}\right) - \right. \right. \\ &e^{-i\frac{k\pi}{b}(2al+c+3b)} \Gamma\left(-2, -i(2al+c+3b)\frac{k\pi}{b}\right) \left. \right\} - \\ &\left\{ e^{i\frac{k\pi}{b}(2al+c+b+2a)} \Gamma\left(-2, i(2al+c+b+2a)\frac{k\pi}{b}\right) - \right. \\ &\left. \left. e^{-i\frac{k\pi}{b}(2al+c+b+2a)} \Gamma\left(-2, -i(2al+c+b+2a)\frac{k\pi}{b}\right) \right\} \right]. \quad (5.26) \end{aligned}$$

La acción efectiva euclídea está dada por la suma de las contribuciones parciales en las ecuaciones (5.21) a (5.26), más

$$\left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} D(s) \right|_{s=0} = -\mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} \log(c). \quad (5.27)$$

Como es bien sabido, pasar al espacio de Minkowski implica realizar la sustitución

$$S_{eff}^{\mathcal{M}}[E, B] = -S_{eff}^{\mathcal{E}}[-iE, B],$$

donde los supraíndices  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{E}$  se refieren a métrica de Minkowski y euclídea.

Luego de hacer esto, se obtiene para la acción efectiva completa a un loop en un espacio-tiempo de Minkowski en cuatro dimensiones:

$$\begin{aligned} S_{eff}^{\mathcal{M}}[E, B] &= \frac{\Omega}{2} (E^2 - B^2) + \Omega \frac{ie^2 EB}{4\pi^2} \left\{ \log\left(\frac{-2ieE}{\mu^2}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{m^2}{-2ieE}\right) + \right. \\ &\log\left[\frac{\Gamma\left(\frac{m^2}{-2ieE} + 1\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\right] + \log\left(\frac{2eB}{\mu^2}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{m^2}{2eB}\right) + \\ &\log\left[\frac{\Gamma\left(\frac{m^2}{2eB} + 1\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\right] - 2\log\left(\frac{-2ieE}{\mu^2}\right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m^2 + 2eB}{-2ieE}\right)^2 - \frac{1}{12}\right] + \\ &2 \frac{\partial}{\partial s} \zeta\left(s - 1, \frac{m^2 + 2eB}{-2ieE}\right) \Big|_{s=0} - 2 \left(\frac{m^2 + 2eB}{-2ieE}\right) \log\left[\frac{\Gamma\left(\frac{m^2 + 2eB}{-2ieE}\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\right] - \\ &\left. \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right\} + 2\Omega \frac{(eE)^2}{4\pi^2} \left\{ \left(\log\left(\frac{-2ieE}{\mu^2}\right) - 1\right) \left[\frac{1}{6} \left(\frac{m^2 + 3eB}{-2ieE}\right)^3 - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{12} \left( \frac{m^2 + 3eB}{-2ieE} \right) - \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{m^2 + eB}{-2ieE} \right)^3 + \\
& \frac{1}{12} \left( 1 + \frac{m^2 + eB}{-2ieE} \right) \left] - \frac{\partial}{\partial s} \zeta \left( s - 2, \frac{m^2 + 3eB}{-2ieE} \right) \right]_{s=0} + \\
& \left( \frac{m^2 + 3eB}{-2ieE} \right) \frac{\partial}{\partial s} \zeta \left( s - 1, \frac{m^2 + 3eB}{-2ieE} \right) \right]_{s=0} + \frac{\partial}{\partial s} \zeta \left( s - 2, 1 + \frac{m^2 + eB}{-2ieE} \right) \right]_{s=0} - \\
& \left. \left( 1 + \frac{m^2 + eB}{-2ieE} \right) \frac{\partial}{\partial s} \zeta \left( s - 1, 1 + \frac{m^2 + eB}{-2ieE} \right) \right]_{s=0} \right\} + \\
& \Omega \frac{(eB)^2}{48\pi^2} \left\{ (\log(\frac{-2ieE}{\mu^2}) + 1) \left( i \frac{B}{E} - 1 \right) + \left( \frac{m^2 + 3eB}{-2ieE} \right) \psi \left( \frac{m^2 + 3eB}{-2ieE} \right) - \right. \\
& \left. \left( 1 + \frac{m^2 + eB}{-2ieE} \right) \psi \left( 1 + \frac{m^2 + eB}{-2ieE} \right) \right\} + \Omega \frac{e^2 EB}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \sum_{l=0}^{\infty} l \times \\
& \left\{ e^{\frac{ik\pi}{eB}(-2ieEl+m^2+3eB)} \Gamma \left( -2, \frac{ik\pi}{eB}(-2ieEl+m^2+3eB) \right) - \right. \\
& e^{\frac{-ik\pi}{eB}(-2ieEl+m^2+3eB)} \Gamma \left( -2, \frac{-ik\pi}{eB}(-2ieEl+m^2+3eB) \right) - \\
& e^{\frac{ik\pi}{eB}(-2ieE(l+1)+m^2+eB)} \Gamma \left( -2, \frac{ik\pi}{eB}(-2ieE(l+1)+m^2+eB) \right) + \\
& \left. e^{\frac{-ik\pi}{eB}(-2ieE(l+1)+m^2+eB)} \Gamma \left( -2, \frac{-ik\pi}{eB}(-2ieE(l+1)+m^2+eB) \right) \right\}, \quad (5.28)
\end{aligned}$$

donde se usaron las definiciones de  $a$ ,  $b$  y  $c$  dadas en el párrafo que sigue a la ecuación (5.3).

Se puede poner a la acción efectiva en una forma manifiestamente invariante de Lorentz y de gauge si se tiene en cuenta que, en el sistema que hemos elegido,

$$\begin{aligned}
E &= \left( (F^2 + G^2)^{\frac{1}{2}} + F \right)^{\frac{1}{2}} \\
B &= \left( (F^2 + G^2)^{\frac{1}{2}} - F \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.29)
\end{aligned}$$

donde  $F = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$  y  $G = \vec{E} \cdot \vec{B}$ .

Debe notarse que las divergencias infrarrojas que aparecen en el límite del caso sin masa han sido aisladas en la contribución que viene de  $D(s)$  en la ecuación (5.4). Ésta es, de hecho, la contribución debida a los modos cero.

Por último, un test que nuestra acción efectiva no puede dejar de pasar es su coincidencia con el bien conocido límite de campos débiles [66, 68]. Para chequearlo, desarrollamos las diferentes contribuciones a la acción efectiva (ecuaciones (5.21) a (5.26)) en potencias de los campos sobre la masa al cuadrado. En los casos de las ecuaciones (5.21) a (5.25), se puede obtener tal desarrollo usando las bien conocidas expansiones asintóticas [9] para  $\log \Gamma(x)$ ,  $\psi(x)$ , y  $\zeta(s, x)$ . Al hacer esto, y reteniendo

términos hasta el orden de campos al cuadrado sobre masa a la cuarta, se obtiene, luego de un cálculo tedioso pero simple,

$$\left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} A(s) \right|_{s=0} \simeq \mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{6} ac^{-1} + \frac{1}{2} \log(c) + \frac{1}{2a} (\log(c) - 1) c \right\}, \quad (5.30)$$

$$\left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} B(s) \right|_{s=0} \simeq \mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{6} bc^{-1} + \frac{1}{2} \log(c) + \frac{1}{2b} (\log(c) - 1) c \right\}, \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} C_1(s) \right|_{s=0} \simeq 2\mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} \left\{ \left( \frac{1}{60} a^2 - \frac{1}{6} b^2 + \frac{1}{6} \frac{b^4}{a^2} \right) c^{-2} + \left( \frac{1}{6} b - \frac{1}{3} \frac{b^3}{a^2} \right) c^{-1} + \right. \\ \left. \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \right) \log(c) + \frac{1}{2} \frac{b}{a^2} (1 - \log(c)) c + \frac{1}{8a^2} \left( \frac{3}{2} - \log(c) \right) c^2 \right\}, \quad (5.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} C_2^1(s) \right|_{s=0} \simeq 2\mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{a}{b} \left\{ \left( \frac{1}{144a} ((3b)^3 - (b+2a)^3) - \right. \right. \\ \left. \frac{1}{60} a(b-a) - \frac{1}{960a^3} ((3b)^5 - (b+2a)^5) \right) c^{-2} + \\ \left( \frac{1}{192a^3} ((3b)^4 - (b+2a)^4) - \frac{1}{48a} ((3b)^2 - (b+2a)^2) \right) c^{-1} + \\ \left( \frac{1}{48a^3} ((3b)^3 - (b+2a)^3) - \frac{1}{12a} (b-a) \right) \log(c) + \\ \left. \frac{1}{16a^3} (\log(c) - 1) ((3b)^2 - (b+2a)^2) c + \frac{1}{8a^3} (\log(c) - \frac{3}{2}) (b-a) c^2 \right\}, \quad (5.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} CD_2^2(s) \right|_{s=0} \simeq -\frac{1}{12} \mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{b}{a} \left\{ \left( \frac{1}{12a} ((b+2a)^3 - (3b)^3) + \right. \right. \\ \left. \frac{1}{3} a(b-a) \right) c^{-2} + \frac{1}{4a} ((3b)^2 - (b+2a)^2) c^{-1} + \frac{(b-a)}{a} \log(c) \left. \right\}. \quad (5.34) \end{aligned}$$

Con respecto a  $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \text{CF}_2^2(s) \Big|_{s=0}$ , se debe usar la expansión asintótica para la función  $\Gamma$  incompleta. Al orden que estamos considerando, es suficiente retener el primer término de este desarrollo. Al hacer esto, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \text{CF}_2^2(s) \Big|_{s=0} &\simeq 8\mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \times \\ &\left\{ \sum_{l=0}^{\infty} l \left( \frac{k\pi}{b} (2al + c + 3b) \right)^{-3} - \sum_{l=0}^{\infty} l \left( \frac{k\pi}{b} (2al + c + b + 2a) \right)^{-3} \right\} = \\ &\frac{7}{720} \mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} \left( \frac{b}{a} \right)^3 \left\{ \zeta\left(2, \frac{c+3b}{2a}\right) - \frac{c+3b}{2a} \zeta\left(3, \frac{c+3b}{2a}\right) - \right. \\ &\left. \zeta\left(2, \frac{c+b+2a}{2a}\right) - \frac{c+b+2a}{2a} \zeta\left(3, \frac{c+b+2a}{2a}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Cuando se reemplaza en esta última expresión el desarrollo asintótico de las funciones zeta de Hurwitz (ecuación (5.17)), se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \text{CF}_2^2(s) \Big|_{s=0} \simeq \frac{7}{720} \mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} \left( \frac{b^3}{a} - \frac{b^4}{a^2} \right) c^{-2}. \quad (5.36)$$

Sumando las contribuciones en las ecuaciones (5.30) a (5.36), más la que viene de  $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \text{D}(s) \Big|_{s=0}$ , la acción efectiva a un loop, en el límite de campo débil, se reduce a

$$\begin{aligned} S_{cl} + S^{(1)} &= \frac{\Omega \mu^4}{2e^2} (a^2 + b^2) + \mu^4 \Omega \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \left[ \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \log(c) \right] c^2 - \right. \\ &\left. \frac{1}{6} (b^2 + a^2) \log(c) + \left[ \frac{7}{90} (ab)^2 - \frac{1}{90} (a^2 + b^2)^2 \right] c^{-2} \right\}. \end{aligned}$$

Ahora pueden realizarse las renormalizaciones finitas usuales [72, 73]. Después de sustraer la acción efectiva para  $a = b = 0$ , y renormalizar la carga, se tiene

$$S_{eff} = \frac{\Omega}{2} (B^2 + E^2) + \frac{\Omega e^4}{8\pi^2 m^4} \left[ \frac{7}{45} (EB)^2 - \frac{1}{45} (E^2 + B^2)^2 \right], \quad (5.37)$$

donde se usaron las definiciones de  $a$ ,  $b$  y  $c$  dadas en el párrafo que sigue a la ecuación (5.3). Debe notarse que esta prescripción de renormalización elimina toda la dependencia con el parámetro de escala  $\mu$ . También coincide con el criterio adoptado, en un contexto diferente, por los autores de la referencia [54], sobre la base de que las correcciones cuánticas deben anularse en el límite de una masa infinita.

La expresión en (5.37) es precisamente la versión euclídea de la acción efectiva de Euler-Heisenberg para campos débiles [66, 68].

La determinación de las contribuciones real e imaginaria a la acción efectiva sería de gran interés, tanto por razones físicas, como para permitir comparar con resultados previos obtenidos con diferentes esquemas [79, 80].

Como ya fue recalado por Schwinger [68], la parte imaginaria da el rate de producción de pares fermión-antifermión. Obtener este rate a partir de la ecuación (5.28)

resulta bastante fácil en los casos particulares  $E = 0$  (se anula) o  $B = 0$  (el bien conocido resultado en [68, 81] es reproducido); sin embargo, para valores generales de  $E$  y  $B$ , el cálculo se vuelve considerablemente más engorroso. En particular, debería obtenerse el resultado ya hallado en [82] mediante otros métodos.

---

---

# CHAPTER 6

---

## Resumen de los resultados

En el Capítulo I hemos dado una breve introducción a la teoría de operadores elípticos y problemas elípticos de borde: condiciones que deben ser satisfechas para definir un problema elíptico, propiedades que posee el espectro para estos operadores, condiciones para la definición de determinadas funciones espectrales y su expresión en términos de los autovalores del operador. Como ya se remarcó, la existencia de este capítulo está ampliamente justificada por la importancia y uso de las funciones espectrales en teoría cuántica de campos.

En el Capítulo II estudiamos la conexión existente entre energías de Casimir para campos escalares regularizadas vía función  $\zeta$  y vía cutoff exponencial. Mostramos que, en general, ambos esquemas de regularización conducen a contribuciones divergentes y a partes finitas mínimas que no coinciden. Determinamos los coeficientes que aparecen en una y otra aproximación. Discutimos el acuerdo con nuestras predicciones en el caso de campos en cajas  $d$ -dimensionales bajo condiciones periódicas de borde. Finalmente, aplicamos nuestros resultados a campos escalares no masivos en esferas (un ejemplo en el que permanecen ambigüedades bajo las prescripciones físicas usualmente impuestas para extraer un resultado finito).

En el Capítulo III, luego de dar una breve presentación sobre extensiones autoadjuntas de operadores diferenciales, estudiamos el problema de un campo de Dirac sin masa (en  $2 + 1$  dimensiones) en el background de una cuerda de flujo de Aharonov-Bohm. Excluimos el origen imponiendo condiciones de contorno espectrales a un radio finito que es luego llevado a cero; obtuvimos de esa forma una de las posibles extensiones autoadjuntas del Hamiltoniano radial, que resulta compatible con un campo magnético tipo  $\delta$  de Dirac en el origen y que respeta la invarianza ante traslaciones enteras del flujo reducido. Hemos dado así una aplicación física de las condiciones espectrales, habitualmente usadas sólo por su interés matemático. Después de confinar la teoría a una región finita, chequeamos la consistencia con el teorema del índice de Atiyah-Patodi-Singer y evaluamos el número fermiónico y la energía de Casimir.

En el Capítulo IV calculamos la energía de Casimir para campos de Dirac ma-

sivos en  $2 + 1$  dimensiones, confinados a una región espacial finita mediante condiciones de contorno de la bolsa de MIT, en presencia de un campo de background de Aharonov-Bohm. Tratamos dos posibles extensiones autoadjuntas del Hamiltoniano y comparamos sus resultados. Hallamos que las energías de Casimir obtenidas para estas extensiones autoadjuntas son radicalmente diferentes, enfatizando el hecho de que describen distintas situaciones físicas; en particular, para una de ellas, y como consecuencia de la presencia de la masa, la energía resulta discontinua a valores enteros del flujo.

Por último, en el capítulo V obtuvimos, mediante la función  $\zeta$ , la acción efectiva a 1-loop para campos de Dirac masivos en presencia de un campo de background electromagnético uniforme pero de magnitud arbitraria. Mostramos el acuerdo entre nuestro resultado general y otros previos, obtenidos mediante otros esquemas de regularización.

---



---

# APPENDIX A

---

## Sumas de Poisson

Obtendremos primero la ecuación (2.32) para la energía de Casimir calculada mediante regularización exponencial; para ello, usaremos la fórmula de suma de Poisson:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p, \quad (\text{A.1})$$

con

$$c_p = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{2\pi i p x} f(x). \quad (\text{A.2})$$

Cuando ésta es aplicada al cálculo de  $h\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right)$ , da

$$h\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-t\left(\left(\frac{2n\pi}{L\mu}\right)^2 + \left(\frac{m}{\mu}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p(t), \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\begin{aligned} c_p(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{2\pi i p x - t\left(\left(\frac{2n\pi}{L\mu}\right)^2 + \left(\frac{m}{\mu}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{L\mu}{\pi} \int_0^{\infty} dx \cos(L\mu p x) e^{-t\left(x^2 + \left(\frac{m}{\mu}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{mL}{\pi \sqrt{1 + \left(\frac{L\mu p}{t}\right)^2}} K_1\left(\frac{m}{\mu} \sqrt{t^2 + (L\mu p)^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Reemplazando (A.4) en (A.3) y tomando la derivada, obtenemos

$$-\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} h\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right) = -\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \left(2 \sum_{p=1}^{\infty} c_p(t) + c_0(t)\right). \quad (\text{A.5})$$

Las relaciones de recurrencia y series ascendentes para las funciones de Bessel modificadas permiten obtener (2.32).

Para obtener (2.36), hacemos uso repetido de la fórmula de Poisson dada en (A.1) y (A.2).

En este caso

$$h\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{-t\left(\left(\frac{2n_1\pi}{L_1\mu}\right)^2 + \left(\frac{2n_2\pi}{L_2\mu}\right)^2 + \left(\frac{m}{\mu}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{A.6})$$

Realizamos primero la suma sobre  $n_2$ , obteniendo

$$h\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{L_2\mu t}{\pi} \frac{\sqrt{\left(\frac{2n_1\pi}{L_1\mu}\right)^2 + \left(\frac{m}{\mu}\right)^2}}{\sqrt{t^2 + (L_2\mu p)^2}} \times \\ K_1\left(\sqrt{\left[\left(\frac{2n_1\pi}{L_1\mu}\right)^2 + \left(\frac{m}{\mu}\right)^2\right] [t^2 + (L_2\mu p)^2]}\right). \quad (\text{A.7})$$

Debido a las propiedades de convergencia de la doble suma, se puede intercambiar el orden de las sumas y, usando nuevamente la suma de Poisson, se obtiene

$$h\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{L_2\mu}{\pi} \frac{t}{\sqrt{t^2 + (L_2\mu p)^2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(t), \quad (\text{A.8})$$

con

$$c_k(t) = \frac{L_1\mu}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{t^2 + (L_2\mu p)^2} \left(\frac{m}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}} [t^2 + (L_2\mu p)^2 + (L_1\mu k)^2]^{-\frac{3}{4}} \times \\ K_{\frac{3}{2}}\left(\frac{m}{\mu} \sqrt{t^2 + (L_2\mu p)^2 + (L_1\mu k)^2}\right). \quad (\text{A.9})$$

Nuevamente, se puede derivar término a término (A.8) (el cálculo es directo, aunque tedioso), y el uso de las fórmulas de recurrencia para las funciones modificadas de Bessel conduce a

$$-\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} h\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right) \Big|_{t=0} = \\ -\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \left( \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{L_2\mu}{\pi} \frac{t}{\sqrt{t^2 + (L_2\mu p)^2}} c_k(t) + \frac{L_2\mu}{\pi} c_0(t) \right) \Big|_{t=0} = \\ -\frac{L_1L_2}{2^3\pi^{\frac{3}{2}}} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \left\{ \left( \sqrt{\left(\frac{n_1L_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n_2L_2}{2}\right)^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \times \right.$$

---

$$K_{\frac{3}{2}} \left( 2m \sqrt{\left(\frac{n_1 L_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n_2 L_2}{2}\right)^2} \right) \left\{ -\frac{L_1 L_2 m^3}{12\pi} + \frac{L_1 L_2 \mu^3}{2\pi t^3} \right\} \Big|_{t=0}. \quad (\text{A.10})$$



---



---

## APPENDIX B

---

### Teorema del Índice de Atiyah-Patodi-Singer

Realizaremos en este apéndice una breve presentación del teorema del índice de Atiyah-Patodi-Singer para variedades con borde [39, 40, 41], tal como se aplica al problema estudiado en el Capítulo 3. Tomemos el hamiltoniano radial

$$H_r = \begin{pmatrix} 0 & L^\dagger \\ L & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_r + \frac{\lambda}{r} \\ -\partial_r + \frac{\lambda}{r} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

con  $\lambda = n + \frac{1}{2} - \kappa$  los autovalores del operador de Dirac tangencial.  $H_r$  actúa sobre espinores de la forma  $\begin{pmatrix} f_n(r) \\ g_n(r) \end{pmatrix}$  que satisfacen, en el borde del disco ( $r = 1$ ), la condición

$$B_L f_n(1) : f_n(1) = 0 \text{ para } \lambda \geq 0 \quad (\text{B.2})$$

$$B_{L^\dagger} g_n(1) : g_n(1) = 0 \text{ para } \lambda < 0. \quad (\text{B.3})$$

En estas condiciones,  $(L_{B_L})^\dagger = L_{B_{L^\dagger}}^\dagger$ . El índice del operador se define como

$$\text{Ind}(H_r) = n_{L_B} - n_{L_{B_{L^\dagger}}^\dagger}, \quad (\text{B.4})$$

donde  $n$  es el número de modos cero del correspondiente operador.

La contribución de volumen al índice (anomalía quiral) es bien conocida; nos concentraremos entonces en calcular la contribución de borde al mismo.

Llamando  $t = 1 - r$  a la variable normal interior, se tiene, para  $H_r$  en la proximidad del borde ( $t = 0$ )

$$\begin{pmatrix} 0 & -\partial_t + \lambda \\ \partial_t + \lambda & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Consideremos ahora los operadores autoadjuntos de segundo orden:  $\Delta_1 = L^\dagger L$ , definido sobre funciones que satisfacen

$$g(0) = 0 \quad \text{si } \lambda \geq 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\left. \frac{df}{dt} + \lambda f \right|_0 = 0 \quad \text{si } \lambda < 0, \quad (\text{B.7})$$

y  $\Delta_2 = L L^\dagger$ , actuando sobre funciones que satisfacen

$$g(0) = 0 \quad \text{si } \lambda < 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\left. -\frac{dg}{dt} + \lambda g \right|_0 = 0 \quad \text{si } \lambda \geq 0. \quad (\text{B.9})$$

Sus autovalores no nulos coinciden. En efecto, si  $L^\dagger L \phi = \alpha \phi$ , multiplicando por  $L$  se tiene  $L L^\dagger (L \phi) = \alpha (L \phi)$ . Así, por cada autovalor no nulo de  $\Delta_1$  existe un autovalor no nulo de  $\Delta_2$ .

Ambos operadores sólo difieren en sus modos cero. Pero los autovalores nulos de  $\Delta_1$  son los modos cero de  $L_{B_L}$ , y los de  $\Delta_2$  son los de  $L_{B_{L^\dagger}}^\dagger$ .

Para obtener la diferencia entre dichos números, calculamos las trazas de heat-kernels de ambos, y, vía transformada de Mellin, ambas  $\zeta(0)$ .

Para el problema del operador  $\Delta_1$  buscamos la solución fundamental de

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \kappa\right)^2 \right) \phi(z, t, t') = 0 \quad (\text{B.10})$$

con

$$\phi(t=0) = 0 \quad \text{para } n + \frac{1}{2} - \kappa \geq 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\left. \left( \frac{\partial}{\partial t} + n + \frac{1}{2} - \kappa \right) \phi \right|_{t=0} = 0 \quad \text{para } n + \frac{1}{2} - \kappa < 0. \quad (\text{B.12})$$

Es fácil ver que la misma está dada por:

$$\frac{e^{-(n+\frac{1}{2}-\kappa)^2 z}}{\sqrt{4\pi z}} \left\{ e^{-\frac{(t-t')^2}{4z}} - e^{-\frac{(t+t')^2}{4z}} \right\}, \quad (\text{B.13})$$

si  $n + \frac{1}{2} - \kappa \geq 0$ , y por

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-(n+\frac{1}{2}-\kappa)^2 z}}{\sqrt{4\pi z}} \left\{ e^{-\frac{(t-t')^2}{4z}} - e^{-\frac{(t+t')^2}{4z}} \right\} + \\ & \left( n + \frac{1}{2} - \kappa \right) e^{-(n+\frac{1}{2}-\kappa)(t+t')} \operatorname{erfc} \left( \frac{t+t'}{2\sqrt{z}} - \left( n + \frac{1}{2} - \kappa \right) \sqrt{z} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

si  $n + \frac{1}{2} - \kappa < 0$ .

Para el problema de  $\Delta_2$ , debemos encontrar la solución fundamental de

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \kappa\right)^2 \right) \phi(z, t, t') = 0 \quad (\text{B.15})$$

con

$$\phi(t=0) = 0 \quad \text{para } n + \frac{1}{2} - \kappa < 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\left( -\frac{\partial}{\partial t} + n + \frac{1}{2} - \kappa \right) \phi \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{para } n + \frac{1}{2} - \kappa \geq 0. \quad (\text{B.17})$$

La solución fundamental con la condición (B.16) está dada por (B.13), mientras que con la condición (B.17), está dada por (B.14) con  $n + \frac{1}{2} - \kappa \rightarrow \kappa - n - \frac{1}{2}$ .

El núcleo de  $e^{-z\Delta_1} - e^{-z\Delta_2}$ , que denotamos por  $k(z, t, t')$ , está entonces dado por

$$k(z, t, t') = \sum_n \text{sgn}(n + \frac{1}{2} - \kappa) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} e^{2|n + \frac{1}{2} - \kappa|t} \text{erfc} \left( \frac{t}{\sqrt{z}} + |n + \frac{1}{2} - \kappa| \sqrt{z} \right) \right\},$$

donde hemos definido  $\text{sgn}(n + \frac{1}{2} - \kappa) = 1$  para  $n + \frac{1}{2} - \kappa = 0$ . Tomando la traza obtenemos para la diferencia de trazas de heat-kernels

$$k(z) = -\frac{1}{2} \sum_n \text{sgn}(n + \frac{1}{2} - \kappa) \text{erfc} \left( |n + \frac{1}{2} - \kappa| \sqrt{z} \right). \quad (\text{B.18})$$

Es fácil ver que  $k(z) \rightarrow_{z \rightarrow \infty} -\frac{1}{2}h$ , donde  $h$  es la dimensión del subespacio correspondiente a  $n + \frac{1}{2} - \kappa = 0$  (núcleo del operador de borde).

Calculamos entonces la diferencia de zetas en cero vía transformada de Mellin

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty (k(z) + \frac{1}{2}h) z^{s-1} dz = \\ & -\frac{\Gamma(s + \frac{1}{2})}{\Gamma(s) 2s \sqrt{\pi}} \sum_{n + \frac{1}{2} - \kappa \neq 0} \frac{\text{sgn}(n + \frac{1}{2} - \kappa)}{|n + \frac{1}{2} - \kappa|^{2s}} = \\ & -\frac{\Gamma(s + \frac{1}{2})}{\Gamma(s) 2s \sqrt{\pi}} \eta(2s), \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

donde se ha usado la definición de la función espectral  $\eta(s)$ , que mide la asimetría del operador de borde.

Finalmente, evaluando en  $s = 0$ , obtenemos

$$\eta(0, \Delta_1) - \eta(0, \Delta_2) = n_{LB} - n_{L_B^\dagger} = -\frac{h + \eta(0)}{2}, \quad (\text{B.20})$$

que es la contribución de borde al índice para el operador de Dirac bajo condiciones APS.



---

---

## APPENDIX C

---

### Coeficientes $b_{(i,j)}$

En este apéndice, damos una lista de los coeficientes  $b_{(i,j)}$  definidos por la ecuación (4.46)

$$\begin{aligned} b_{(1,0)} &= -\frac{1}{2} - 2\alpha^2 + 2z \\ b_{(1,1)} &= 0 \\ b_{(1,2)} &= \frac{1}{6} \\ b_{(2,0)} &= -(z^2) \\ b_{(2,1)} &= -\frac{1}{4} - \alpha^2 + z \\ b_{(2,2)} &= \frac{1}{4} - z \\ b_{(2,3)} &= \frac{1}{4} \\ b_{(2,4)} &= -\frac{1}{4} \\ b_{(3,0)} &= \frac{5}{96} + \frac{5\alpha^2}{12} + \frac{\alpha^4}{6} - \left(\frac{1}{4} + \alpha^2\right)z + \frac{2z^3}{3} \\ b_{(3,1)} &= -\frac{1}{4} + z - z^2 \\ b_{(3,2)} &= \frac{9}{160} - 2\alpha^2 - \frac{\alpha^4}{2} - \left(\frac{1}{2} - 3\alpha^2\right)z + z^2 \\ b_{(3,3)} &= 1 - 2z \end{aligned}$$

$$b_{(3,4)} = -\frac{23}{32} + \frac{5\alpha^2}{4} + \frac{7z}{4}$$

$$b_{(3,5)} = -\frac{3}{4}$$

$$b_{(3,6)} = \frac{179}{288}$$

$$b_{(4,0)} = \frac{1}{16} + \frac{\alpha^2}{4} - \left(\frac{1}{4} + \alpha^2\right)z + \left(\frac{1}{4} + \alpha^2\right)z^2 - \frac{z^4}{2}$$

$$b_{(4,1)} = -\frac{17}{64} + \frac{15\alpha^2}{8} + \frac{3\alpha^4}{4} - \left(-\frac{7}{8} + \frac{9\alpha^2}{2}\right)z - z^2 + z^3$$

$$b_{(4,2)} = -\frac{1}{4} - 4\alpha^2 - \left(-\frac{1}{2} - 10\alpha^2\right)z + \left(\frac{1}{4} - 4\alpha^2\right)z^2 - z^3$$

$$b_{(4,3)} = \frac{165}{64} - \frac{25\alpha^2}{4} - \frac{5\alpha^4}{4} - \left(6 - \frac{15\alpha^2}{2}\right)z + \frac{5z^2}{2}$$

$$b_{(4,4)} = -\frac{37}{32} + \frac{39\alpha^2}{4} - (-4 + 12\alpha^2)z - 2z^2$$

$$x_{(4,5)} = -\frac{327}{64} + \frac{35\alpha^2}{8} + \frac{49z}{8}$$

$$b_{(4,6)} = \frac{57}{16} - 6\alpha^2 - \frac{21z}{4}$$

$$b_{(4,7)} = \frac{179}{64}$$

$$b_{(4,8)} = -\frac{71}{32}$$

---



---

## APPENDIX D

---

### Funciones $f(s; a, b; x)$

Aquí vamos a dar todas las propiedades analíticas de las funciones  $f(s; a, b; x)$  definidas en la ecuación (4.52).

Como en la referencia [55], haremos uso de

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(\nu) = \int_0^{\infty} d\nu h(\nu) - i \int_0^{\infty} d\nu \frac{h(i\nu + \epsilon) - h(-i\nu + \epsilon)}{1 + e^{2\pi\nu}} \quad (\text{D.1})$$

en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Cuando es aplicada a  $h(\nu) = \nu^a \left(1 + \left(\frac{\nu}{x}\right)^2\right)^{-t}$ , la ecuación previa da

$$\begin{aligned} f(t; a, 0; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \nu^a \left(1 + \left(\frac{\nu}{x}\right)^2\right)^{-t} = x^{a+1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma\left(t - \frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma(t)} + \right. \\ &\quad \left. 2 \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right) \int_0^1 du \frac{u^a}{1 + e^{2\pi u x}} (1 - u^2)^{-t} + \right. \\ &\quad \left. 2 \sin\left(\frac{\pi a}{2} - \pi t\right) \int_1^{\infty} du \frac{u^a}{1 + e^{2\pi u x}} (u^2 - 1)^{-t} \right\}. \quad (\text{D.2}) \end{aligned}$$

Estamos interesados en  $f(s; a, b; x)$ , para  $b$  arbitrario. A partir de la definición, es claro que  $f(s; a, b; x) = f(s + b, a, 0; x)$ . Sin embargo, cuando  $b$  crece, las integrales en la ecuación (D.2) eventualmente divergen en  $u = 1$ . Para evitar estas divergencias, realizaremos un número adecuado de integraciones por partes, obteniendo así

$$\begin{aligned} f(t; a, 0; x) &= x^{a+1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma\left(t - \frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma(t)} - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{e^{i\pi a} + 1}{2}\right) \frac{(-1)^{\frac{a}{2}}}{2^{\frac{a-2}{2}}} \sin(\pi t) \frac{\Gamma\left(t - \frac{a}{2}\right)}{\Gamma(t)} \int_1^{\infty} u du g\left(\frac{a}{2}, a - 1; u, x\right) (u^2 - 1)^{-t + \frac{a}{2}} - \right. \end{aligned}$$

$$\left( \frac{e^{i\pi a} - 1}{2} \right) \frac{1}{2^{\frac{a-3}{2}}} \frac{\Gamma\left(t - \frac{a-1}{2}\right)}{\Gamma(t)} \left[ \int_0^1 u \, du \, g\left(\frac{a-1}{2}, a-1; u, x\right) (1-u^2)^{-t+\frac{a-1}{2}} + \right. \\ \left. (-1)^{\frac{a-1}{2}} \cos(\pi t) \int_1^\infty u \, du \, g\left(\frac{a-1}{2}, a-1; u, x\right) (u^2-1)^{-t+\frac{a-1}{2}} \right] \Bigg\}, \quad (\text{D.3})$$

donde

$$g(a, b; u, x) = \left( \frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^a \frac{u^b}{1 + e^{2\pi u x}}. \quad (\text{D.4})$$

Sin embargo, el número de integraciones por partes está acotado por el requerimiento de que los términos integrados sean bien comportados en  $u = 0$ . En lo que sigue, mantendremos el número de integraciones admisible, mediante el uso de la siguiente relación de recurrencia

$$f(s; a, b; x) = f(s; a, b-1; x) - \frac{1}{x^2} f(s; a+2, b; x). \quad (\text{D.5})$$

De esta forma, todas las funciones requeridas pueden ser reducidas a cuatro casos diferentes

- $f(s; 2n, n; x)$ ,  $f(s; 2n, n + \frac{1}{2}; x)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$
- $f(s; 2n+1, n; x)$ ,  $f(s; 2n+1, n + \frac{1}{2}; x)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

Finalmente, después de expandir en potencias de  $s + \frac{1}{2}$ , obtenemos

$$f(2n, n; x) = x^{2n+1} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{s + \frac{1}{2}} \left( n - \frac{1}{2} \right) - \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) + \left( n - \frac{1}{2} \right) \left[ \psi(1) - \psi\left( n + \frac{1}{2} \right) \right] \right] - \right. \\ \left. \frac{\pi}{2^{n-2}} \frac{\left( n - \frac{1}{2} \right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_1^\infty u \, du \, g(n, 2n-1; u, x) (u^2-1)^{\frac{1}{2}} + O\left(s + \frac{1}{2}\right) \right\}, \quad (\text{D.6})$$

$$f\left(2n, n + \frac{1}{2}; x\right) = x^{2n+1} \left\{ -n \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} - \right. \\ \left. n \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\pi}{\Gamma(n+1)} \int_1^\infty u \, du \, g(n, 2n-1; u, x) + O\left(s + \frac{1}{2}\right) \right\} \quad (\text{D.7})$$

$$f(2n+1, n; x) = x^{2(n+1)} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\Gamma(n+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left( n - \frac{1}{2} \right) - \right.$$

$$\frac{1}{2^{n-2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \left(n - \frac{1}{2}\right) \int_0^1 u du g(n, 2n; u, x) (1-u^2)^{\frac{1}{2}} + O\left(s + \frac{1}{2}\right) \Big\}, \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} f\left(2n+1, n + \frac{1}{2}; x\right) &= x^{2(n+1)} \left\{ -\frac{1}{2s + \frac{1}{2}} n \left[1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2^{n-2}} \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty u du g(n, 2n; u, x) \right] - \\ &\quad \left. \frac{1}{2} [1 + n + n(\psi(1) - \psi(n+1))] \right\} + \\ &\quad \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left\{ [1 + n(\psi(1) - \psi(n+1))] \int_0^\infty u du g(n, 2n; u, x) - \right. \\ &\quad \left. n \int_0^\infty u du g(n, 2n; u, x) \ln |u^2 - 1| \right\} + O\left(s + \frac{1}{2}\right) \Big\}, \quad (\text{D.9}) \end{aligned}$$

donde  $\psi(x)$  es la función Psi de Euler.

Estas expresiones generan todas las funciones  $f$  necesarias para la evaluación de los  $A_i(s)$  requeridos, para  $i = 1, 2, \dots$

Nótese que, para  $j = 0$  e  $i = 1$ , el prefactor  $\Gamma\left(s + \frac{i+j}{2}\right)$  en la ecuación (4.56) tiene un polo en  $s = -\frac{1}{2}$ . Por lo tanto se debe retener el orden  $s + \frac{1}{2}$  en la expansión de  $f\left(s; 0, \frac{1}{2}; x\right)$ ,

$$\begin{aligned} f\left(s; 0, \frac{1}{2}; x\right) &= -\pi x \left(s + \frac{1}{2}\right) \left[1 + 2 \int_1^\infty u du g(0, -1; u, x)\right] + \\ &\quad O\left(\left(s + \frac{1}{2}\right)^2\right). \quad (\text{D.10}) \end{aligned}$$



---



---

## APPENDIX E

---

### Evaluación de $A_{-1}$ y $A_0$

En este apéndice describiremos algunos detalles del cálculo de los  $A_i(s)$ , (ecuaciones (4.53)-(4.56)), en  $s = -\frac{1}{2}$ .

En primer lugar, obtendremos una expresión para  $A_{-1}$  en la ecuación (4.53)

$$A_{-1}(s) = \frac{2R^{2s}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} z^{-2s+1} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} f\left(s; 0, -\frac{1}{2}; z\sqrt{y}\right). \quad (\text{E.1})$$

Mediante el uso de la ecuación (D.2) en el apéndice previo,  $A_{-1}$  puede ser puesto en la forma

$$A_{-1}(s) = \frac{2R^{2s}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} z^{-2s+1} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{y} z \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s-1)}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} + 2\sqrt{y} z \sin\left(\pi\left(\frac{1}{2} - s\right)\right) \int_1^\infty du (u^2 - 1)^{\frac{1}{2}-s} \frac{1}{1 + e^{2\pi u \sqrt{y} z}} \right\}. \quad (\text{E.2})$$

Luego de intercambiar las integrales, se obtiene

$$A_{-1}(s) = \frac{R^{2s} z^{-2s+2}}{s-1} + \frac{4R^{2s} z^{-2s+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(s)\Gamma(\frac{3}{2}-s)} \int_1^\infty du \frac{(u^2 - 1)^{\frac{1}{2}-s}}{u} \ln(1 + e^{-2\pi uz}) - \frac{2R^{2s} z^{-2s}}{\sqrt{\pi}\Gamma(s)\Gamma(\frac{3}{2}-s)} \left\{ \frac{\pi^2\Gamma(s)\Gamma(\frac{3}{2}-s)}{24\Gamma(\frac{3}{2})} + \int_1^\infty du \frac{(u^2 - 1)^{\frac{1}{2}-s}}{u^2} \text{Li}_2(-e^{-2\pi zu}) \right\}, \quad (\text{E.3})$$

donde  $\text{Li}_j(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^j}$ .

Finalmente, expandiendo alrededor de  $s = -\frac{1}{2}$ , se obtiene

$$A_{-1}(s) = \frac{2z^3}{R} \left[ -\frac{1}{3} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{2\pi^2 z^2} \int_1^\infty du \frac{u^2 - 1}{u^2} \text{Li}_2(-e^{-2\pi uz}) - \right.$$

$$\frac{1}{\pi z} \int_1^\infty du \frac{u^2 - 1}{u} \log(1 + e^{-2\pi uz}) \Big] + O\left(s + \frac{1}{2}\right), \quad (\text{E.4})$$

que resulta una representación útil para cálculos numéricos.

Evaluamos ahora  $A_0$  en la ecuación (4.54),

$$A_0(s) = \frac{2R^{2s}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)} z^{-2s-1} \int_0^1 \frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} f\left(s; 1, \frac{1}{2}; z\sqrt{y}\right). \quad (\text{E.5})$$

Como antes, usando la ecuación (D.2) e intercambiando el orden de integración, se obtiene

$$\begin{aligned} A_0(s) = & \frac{2R^{2s} z^{-2s-1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)} \left\{ \frac{z^2}{2\left(s - \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ & 2z^2 \int_0^1 du u (1 - u^2)^{-(s+\frac{1}{2})} \int_0^1 dy \frac{1}{y^{\frac{1}{2}} (1 + e^{2\pi uz\sqrt{y}})} + \\ & \left. 2 \cos\left(\pi\left(s + \frac{1}{2}\right)\right) z^2 \int_1^\infty du u (u^2 - 1)^{-(s+\frac{1}{2})} \int_0^1 dy \frac{1}{y^{\frac{1}{2}} (1 + e^{2\pi uz\sqrt{y}})} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Ahora, después de extenderlo analíticamente y desarrollar alrededor de  $s = -\frac{1}{2}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} A_0(s) = & \frac{z^2}{\pi R} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{12z^2}\right) - \frac{z^2}{\pi R} \left[1 + \frac{1}{6z^2} + 2\left(1 + \frac{1}{12z^2}\right) \log\left(\frac{z}{2R}\right) + \right. \\ & \left. \frac{2}{\pi z} \int_0^\infty du \log|1 - u^2| \log(1 + e^{-2\pi uz}) \right] + O\left(s + \frac{1}{2}\right), \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

donde aparece un polo simple en  $s = -\frac{1}{2}$ .

Claramente, en ambos casos, las partes finitas deben ser evaluadas numéricamente. No detallaremos el cálculo de los  $A_i$  para  $i > 0$ , ya que es una consecuencia directa de las propiedades de  $f(s; a, b; x)$  descritas en el apéndice previo.

---



---

## APPENDIX F

---

### Cálculo detallado de $CF_2^2$

Partimos de la ecuación (5.12)

$$CF_2^2(s) = 4\mu^4\Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{1}{\Gamma(s)} b^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k\pi)^2} \times$$

$$\int_0^{\infty} dt t^{s+2} \frac{e^{-(2a+b+c)t} (e^{-2bt} - e^{-2at})}{(1 - e^{-2at})^2} \frac{1}{(bt)^2 + (k\pi)^2}. \quad (F.1)$$

El factor  $\frac{1}{(bt)^2 + (k\pi)^2}$  puede ser escrito como una integral; de hecho

$$\frac{1}{(bt)^2 + (k\pi)^2} = \frac{-1}{2ik\pi} \left[ \frac{1}{bt + ik\pi} - \frac{1}{bt - ik\pi} \right] = \frac{1}{k\pi} \int_0^{\infty} du e^{-btu} \sin(k\pi u).$$

Cuando esta expresión es reemplazada en la ecuación (F.1), se obtiene

$$CF_2^2(s) = 4\mu^4\Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{1}{\Gamma(s)} b^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k\pi)^3} \times$$

$$\int_0^{\infty} dt t^{s+2} \frac{e^{-(2a+b+c)t} (e^{-2bt} - e^{-2at})}{(1 - e^{-2at})^2} \int_0^{\infty} du e^{-btu} \sin(k\pi u)$$

o, luego de intercambiar integrales

$$CF_2^2(s) = 4\mu^4\Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{1}{\Gamma(s)} b^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k\pi)^3} \int_0^{\infty} du \sin(k\pi u) \frac{\Gamma(s+3)}{(2a)^{s+3}} \times$$

$$\left\{ \zeta \left( s+2, \frac{c+3b+bu}{2a} \right) - \frac{c+3b+bu}{2a} \zeta \left( s+3, \frac{c+3b+bu}{2a} \right) \right\}$$

$$\zeta\left(s+2, \frac{c+b+2a+bu}{2a}\right) + \frac{c+b+2a+bu}{2a} \zeta\left(s+3, \frac{c+b+2a+bu}{2a}\right) \Big\}.$$

Cuando las funciones  $\zeta$  son escritas en términos de sus desarrollos en serie, se obtiene

$$CF_2^2(s) = 4\mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{1}{\Gamma(s)} b^3 \frac{\Gamma(s+3)}{(2a)^{s+3}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k\pi)^3} \int_0^{\infty} du \sin(k\pi u) \times$$

$$\left\{ \sum_{l=0}^{\infty} l \left(l + \frac{c+3b+bu}{2a}\right)^{-(s+3)} - \sum_{l=0}^{\infty} l \left(l + \frac{c+b+2a+bu}{2a}\right)^{-(s+3)} \right\}.$$

Finalmente, después de realizar la integral restante, se llega a la ecuación (5.13):

$$CF_2^2(s) = -2i\mu^4 \Omega \frac{ab}{4\pi^2} \frac{\Gamma(s+3)}{\Gamma(s)} b^{-s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k\pi)^{1-s}} \sum_{l=0}^{\infty} l \times$$

$$\left[ \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}s} e^{i\frac{k\pi}{b}(2al+c+3b)} \Gamma\left(-s-2, i(2al+c+3b)\frac{k\pi}{b}\right) - C.C. \right\} - \right.$$

$$\left. \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}s} e^{i\frac{k\pi}{b}(2al+c+b+2a)} \Gamma\left(-s-2, i(2al+c+b+2a)\frac{k\pi}{b}\right) - C.C. \right\} \right]. \quad (F.2)$$

---

# BIBLIOGRAPHY

- [1] H. B. G. Casimir, Proc. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
- [2] G. Plunien, B. Muller, and W. Greiner, Phys. Rep. **134**, 87 (1986).
- [3] J. Ambjørn and S. Wolfram, Ann. Phys. **147**, 1 (1983).
- [4] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **55**, 133 (1977).
- [5] P. B. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah - Singer index theorem* (Publish or Perish, Vilmington, 1984).
- [6] R. T. Seeley, A. M. S. Proc. Symp. Pure Math. **10**, 288 (1967).
- [7] R. T. Seeley, Am. Journ. Math. **91**, 889 (1969).
- [8] R. T. Seeley, Am. Journ. Math. **91**, 963 (1969).
- [9] eds. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *The Bateman manuscript project: Higher transcendental functions* (McGraw-Hill, New York, 1953).
- [10] S. Agmon, Commun. Pure Appl. Math. **10**, 288 (1967).
- [11] C. G. Beneventano and E. M. Santangelo, Int. Journ. Mod. Phys. **A11**, 2871 (1996).
- [12] N. F. Svaiter and B. F. Svaiter, J. Math. Phys. **32**, 175 (1991).
- [13] N. F. Svaiter and B. F. Svaiter, Phys. Rev. **D47**, 4581 (1993).
- [14] J. S. Dowker and R. Critchley, Phys. Rev. **D13**, 3224 (1976).
- [15] S. Blau, M. Visser, and A. Wipf, Nucl. Phys. **310B**, 163 (1988).

- [16] G. Grubb and R. T. Seeley, univ. of Copenhagen, Math. Inst., preprint Nro. 11 (unpublished).
- [17] E. Elizalde and A. Romeo, *J. Math. Phys.* **30**, 1133 (1989).
- [18] J. S. Dowker and G. Kennedy, *J. Phys. A* **11**, 895 (1978).
- [19] J. S. Dowker, *Class. Quant. Grav.* **13**, 585 (1996).
- [20] J. S. Dowker, hep-th/9507096 .
- [21] M. Bordag, B. Geyer, K. Kirsten, and E. Elizalde, *Commun. Math. Phys.* **179**, 215 (1996).
- [22] M. Bordag, E. Elizalde, and K. Kirsten, *J. Math. Phys.* **37**, 895 (1996).
- [23] C. M. Bender and K. A. Milton, *Phys. Rev.* **D50**, 6547 (1994).
- [24] M. Reed and B. Simon, *Functional Analysis* (Academic Press, New York, 1980).
- [25] M. Reed and B. Simon, *Fourier Analysis and Self-Adjointness* (Academic Press, New York, 1975).
- [26] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [27] M. G. Alford, J. March-Russell, and F. Wilczek, *Nucl. Phys.* **B328**, 140 (1989).
- [28] J. March-Russell and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2066 (1988).
- [29] M. G. Alford and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1071 (1989).
- [30] C. R. Hagen, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 503 (1990).
- [31] E. G. Flekkøy and J. M. Leinaas, *Int. Journ. Mod. Phys.* **A6**, 5327 (1991).
- [32] P. de Sousa Gerbert and R. Jackiw, *Commun. Math. Phys.* **124**, 229 (1989).
- [33] P. de Sousa Gerbert, *Phys. Rev.* **D40**, 1346 (1989).
- [34] C. Manuel and R. Tarrach, *Phys. Lett.* **B301**, 72 (1993).
- [35] Y. A. Sitenko, hep-th/9702148 .
- [36] Y. A. Sitenko and D. G. Rakityanskii, *Phys. Atom. Nucl.* **60**, 1497 (1997).
- [37] Y. A. Sitenko, *Phys. Lett.* **B387**, 334 (1996).
- [38] Y. A. Sitenko and D. G. Rakityanskii, hep-th/9710130 .
- [39] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **77**, 43 (1975).
- [40] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **78**, 43 (1975).

- [41] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **79**, 71 (1976).
- [42] H. Falomir, R. E. Gamboa Saraví, and E. M. Santangelo, *J. Math. Phys.* **39**, 532 (1998).
- [43] Z. Q. Ma, *J. Phys.* **A19**, L317 (1986).
- [44] M. Ninomiya and C. I. Tan, *Nucl. Phys.* **B257**, 199 (1985).
- [45] C. G. Beneventano, M. De Francia, and E. M. Santangelo, *Int. Journ. Mod. Phys.* **A14**, 4749 (1999).
- [46] C. G. Beneventano, M. De Francia, and E. M. Santangelo, *Proceedings of Fourth Workshop on Quantum Field Theory under the influence of External Conditions* 240 (1999).
- [47] J. S. Dowker, J. S. Apps, K. Kirsten, and M. Bordag, *Class. Quant. Grav.* **13**, 2911 (1996).
- [48] A. P. Polychronakos, *Nucl. Phys.* **283B**, 268 (1987).
- [49] A. J. Niemi and G. W. Semenoff, *Phys. Rev.* **D30**, 809 (1984).
- [50] S. Leseduarte and A. Romeo, *Commun. Math. Phys.* **193**, 317 (1998).
- [51] E. Elizalde, S. Leseduarte, and A. Romeo, *J. Phys.* **A26**, 2409 (1993).
- [52] S. Leseduarte and A. Romeo, *J. Phys.* **A27**, 2483 (1994).
- [53] C. G. Beneventano, M. De Francia, K. Kirsten, and E. M. Santangelo, *Phys. Rev.* **D61**, 4749 (2000).
- [54] M. Bordag and K. Kirsten, *Phys. Rev.* **D60**, 105019 (1999).
- [55] E. Elizalde, M. Bordag, and K. Kirsten, *J. Phys* **A31**, 1743 (1998).
- [56] P. Hasenfratz, and J. Kuti, *Phys. Rep.* **40**, 76 (1978).
- [57] M. Bordag, E. Elizalde, K. Kirsten, and S. Leseduarte, *Phys. Rev.* **D56**, 4896 (1997).
- [58] E. Elizalde *et al.*, *Zeta regularization techniques with applications* (World Scientific, Singapore, 1994).
- [59] E. Elizalde, *Ten physical applications of spectral zeta functions* (Springer-Verlag, Berlin, 1995).
- [60] M. Bordag, E. Elizalde, and K. Kirsten, *J. Math. Phys.* **37**, 895 (1996).
- [61] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, New York, 1970).

- [62] M. Scandurra, J. Phys. **A32**, 5679 (1999).
- [63] C. G. Beneventano and E. M. Santangelo, hep-th/0006123 .
- [64] J. Schwinger, Phys. Rev. **128**, 2425 (1962).
- [65] R. E. Gamboa Saraví, M. A. Muschiatti, F. A. Schaposnik, and J. E. Solomin, Annals of Physics **157**, 360 (1984).
- [66] H. Euler and W. Heisenberg, Z. Phys. **98**, 714 (1936).
- [67] V. Weisskopf, Kong. Dans. Vid. Selsk. Math-fys. Medd. **14**, 1 (1936).
- [68] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [69] W. Dittrich, J. Phys. **A9**, 1171 (1976).
- [70] J. S. Heyl and L. Hernquist, Phys. Rev. **D55**, 2249 (1997).
- [71] G. V. Dunne and T. M. Hall, Phys. Rev. **D60**, 06502 (1999).
- [72] S. K. Blau, M. Visser, and A. Wipf, Int. Journ. Mod. Phys. **A6**, 5409 (1991).
- [73] R. Soldati and L. Sorbo, Phys. Lett. **B426**, 426 (1998).
- [74] A. Bassetto, Phys. Lett. **B222**, 443 (1989).
- [75] E. W. Barnes, Trans. Camb. Philos. Soc. **19**, 374 (1903).
- [76] E. W. Barnes, Trans. Camb. Philos. Soc. **19**, 426 (1903).
- [77] M. Bordag, K. Kirsten, and J. S. Dowker, Commun. Math. Phys. **182**, 371 (1996).
- [78] M. Holthaus, E. Kalinowski, and K. Kirsten, Ann. Phys. **270**, 137 (1998).
- [79] W. J. Mielniczuk, J. Phys. **A15**, 2905 (1982).
- [80] M. Claudson, A. Yildiz, and P. H. Cox, Phys. Rev. **D22**, 2022 (1980).
- [81] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [82] A. Nikishov, Sov. Phys. JETP **30**, 660 (1970).