

Modelado y verificación de un proceso Poisson

J. Martinelli y A. Veiga

Distribución del tiempo entre eventos

DISTRIBUCION DE POISSON: $P(k,t)$ es la probabilidad de ocurrencia de k eventos en un tiempo t dada una tasa λ (medida en un intervalo muy largo de tiempo)

$$P(k,t) = (\lambda t)^k e^{-\lambda t} / k!$$

Dado un evento, la probabilidad de que el tiempo hasta el próximo evento t_n sea mayor que T equivale a la probabilidad de 0 eventos en un tiempo T ($k=0$ y $t=T$)

$$P(t_n > T) = P(0, T) = e^{-\lambda T}$$

La probabilidad de que el tiempo sea menor que T (probabilidad acumulada) es

$$P(t_n < T) = 1 - e^{-\lambda T} = F(T)$$

La función de distribución de probabilidades (pdf) resulta

$$f(T) = F'(T) = \lambda e^{-\lambda T}$$

El tiempo entre eventos tiene **distribución exponencial**.

Distribución exponencial

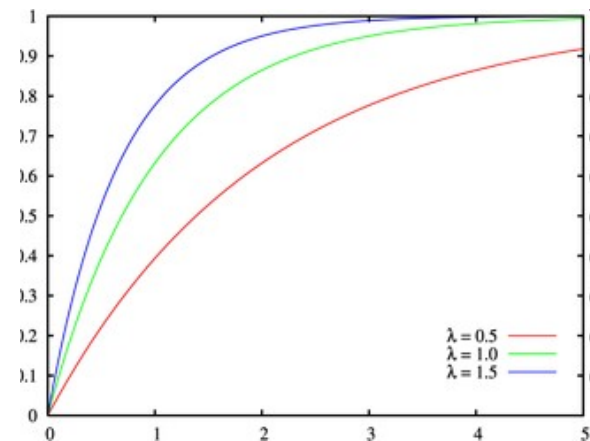
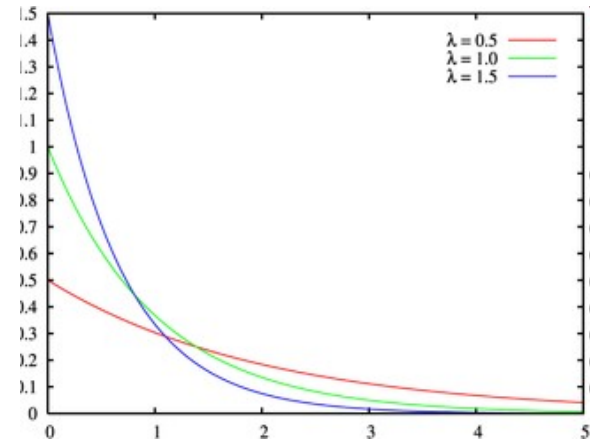
$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$F(x; \lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

NOTA: Puede demostrarse que el tiempo de espera hasta que ocurran n eventos tiene distribución Gamma($n, 1/\lambda$).



Simulaciones

División del tiempo en intervalos pequeños en los que puede ocurrir sólo un evento.

La probabilidad de ocurrencia de un evento no depende de los eventos anteriores.

La probabilidad de ocurrencia en cada intervalo es baja pero tiene muchas oportunidades de suceder.



Unidad de tiempo = Tiempo muerto del discriminador

Ortec 436 100 MHz discriminator = [10 ns]

Ortec 583 CF discriminator = 50 ns (el 584 nuevo tiene 20 ns)

Simulaciones

```
% L, NN, IC
for t = 1:NN           % La unidad de tiempo es 1

    x=rand(1);        % Aleatorio entre 0 y 1

    te=te+1;          % Tiempo entre eventos
    if(x<L)           % Evento?
        n=n+1;        % Inc no total de cuentas
        ntc=ntc+1;    % Inc cuentas en el intervalo
        A(t)=1;       % A almacena los eventos en el tiempo (1 o 0)
        B(n)=te;      % B almacena el tiempo entre dos positivos: MCA
                        % length(B) es el numero de positivos
        te=0;         % Reset del tiempo entre eventos
    else
        A(t)=0;
    end;

    tc=tc+1;          % Tiempo de conteo
    if(tc==IC)        % Intervalo de conteo alcanzado? IC=Dwell
        itc=itc+1;
        C(itc)=ntc;  % C almacena el conteo por intervalo: MCS
        ntc=0;
        tc=0;        % Reset del tiempo de conteo
    end;

end;
```

L pequeño y NN grande -> Poisson

Simulaciones

```
% PARAMETROS CONFIGURABLES
```

```
L=1/20000; % Tasa de positivos (1 cada x unidades de tiempo)
```

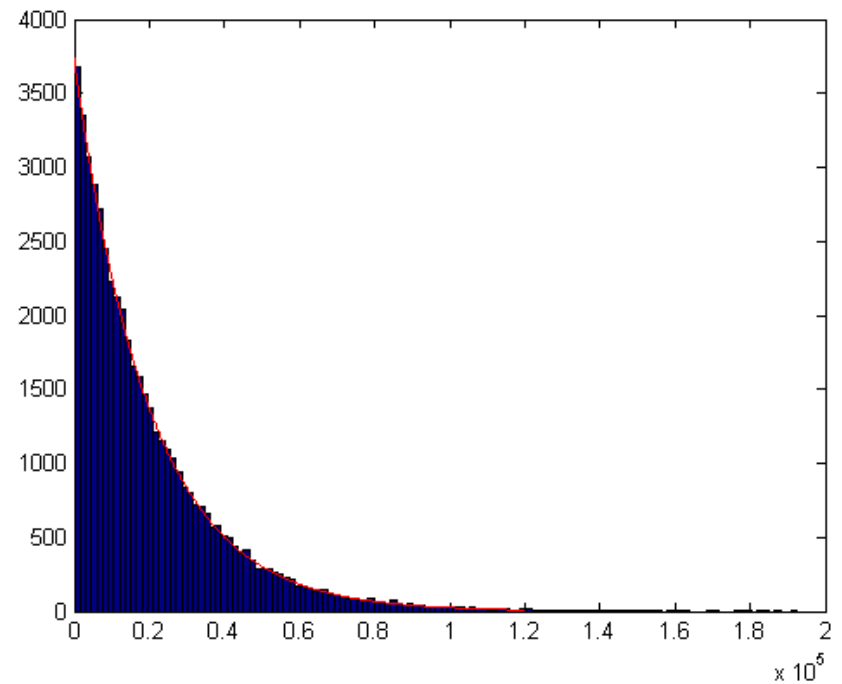
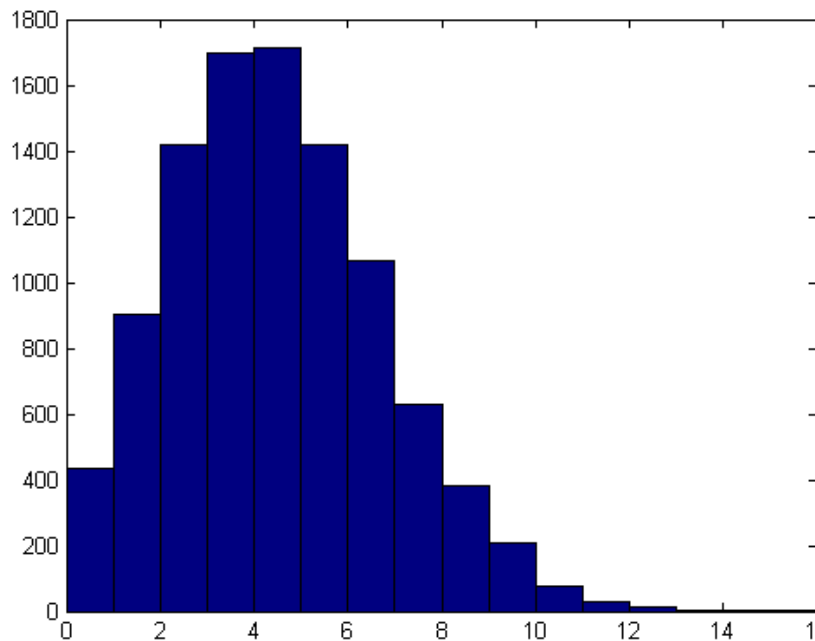
```
NN=1e9; % Duración de la simulación, en unidades de tiempo (tiradas)
```

```
IC=5/L; % Dwell, intervalo de conteo, en unidades de tiempo, para que cuente aprox 5
```

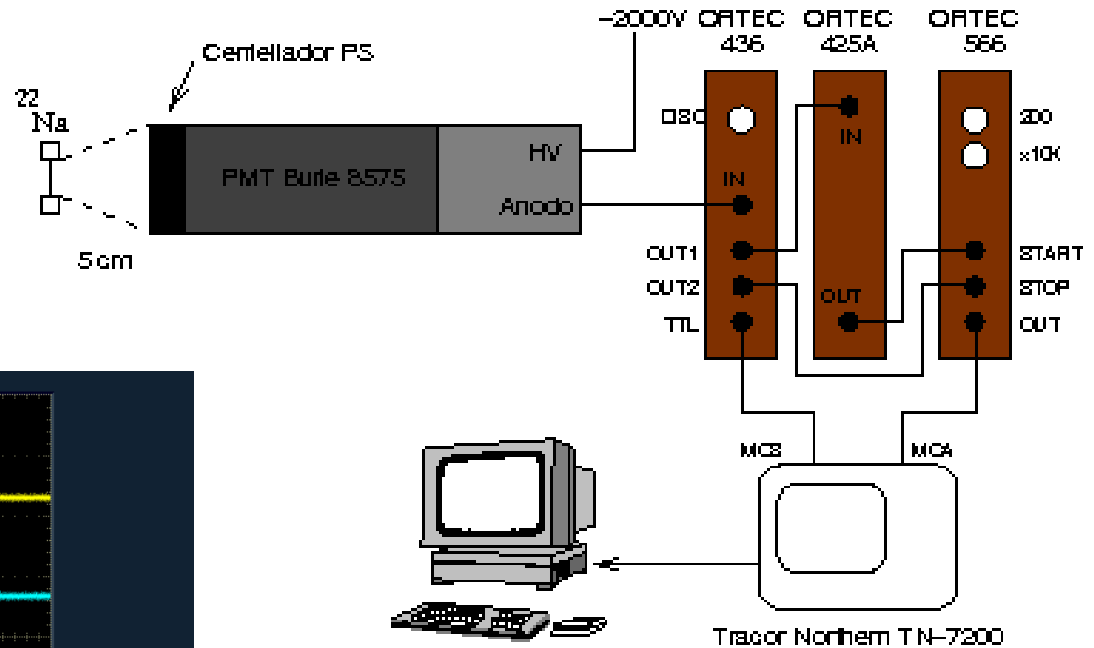
```
% Si la unidad de tiempo es 50 ns, tasa=1K, run=50s, dwell=5ms (cuenta 5)
```

```
positivos = 49822
```

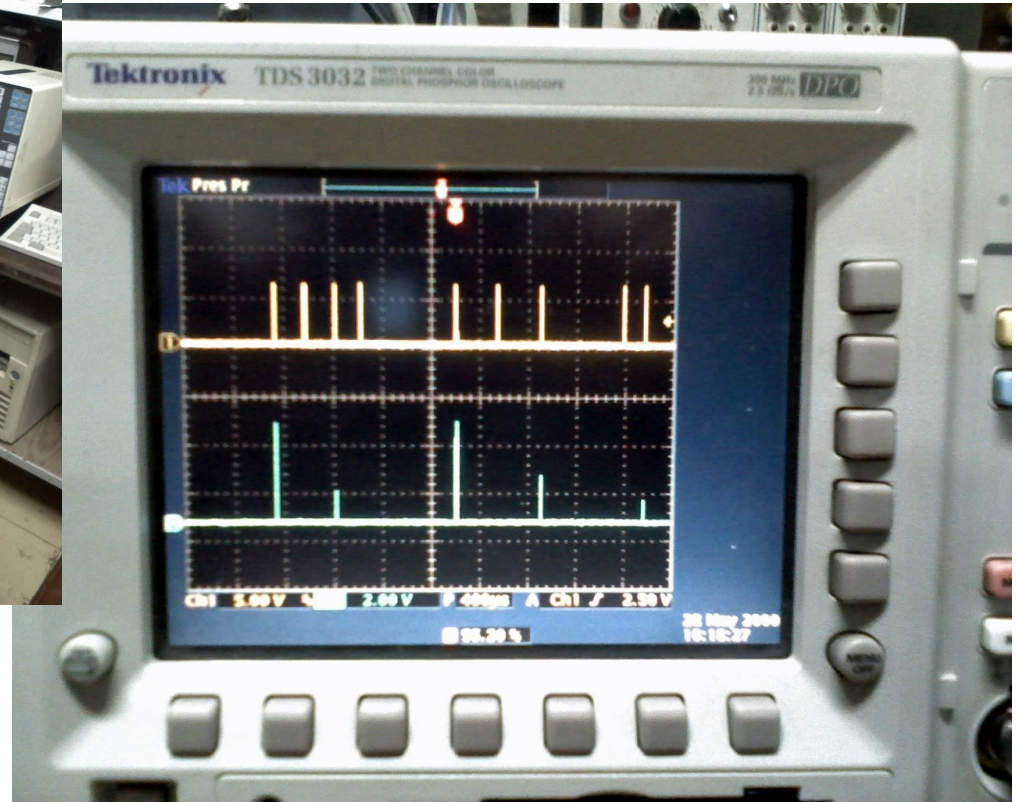
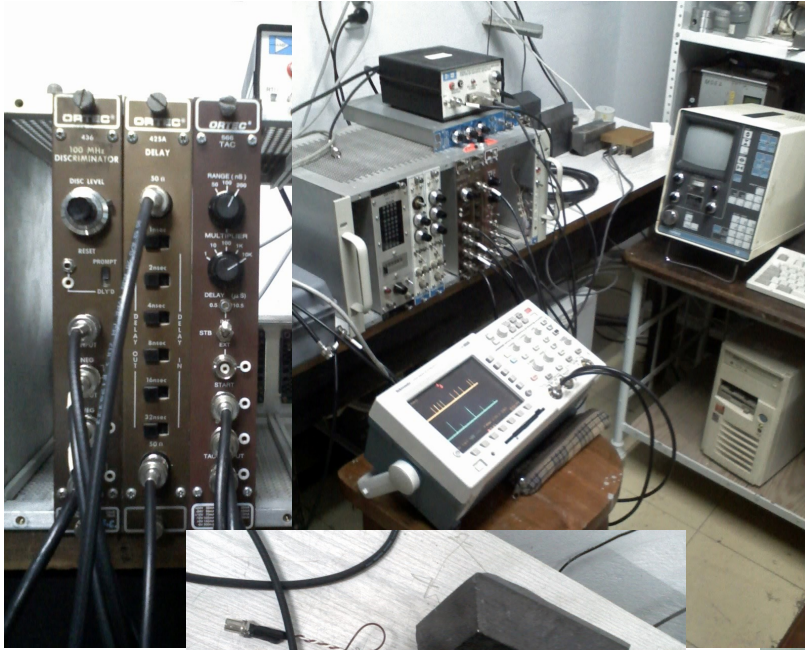
```
Fit tasa = 2.0071e+004
```



Configuración experimental

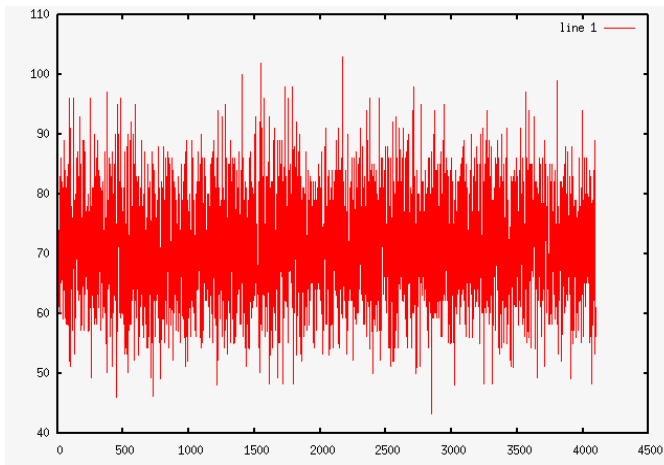


Configuración experimental

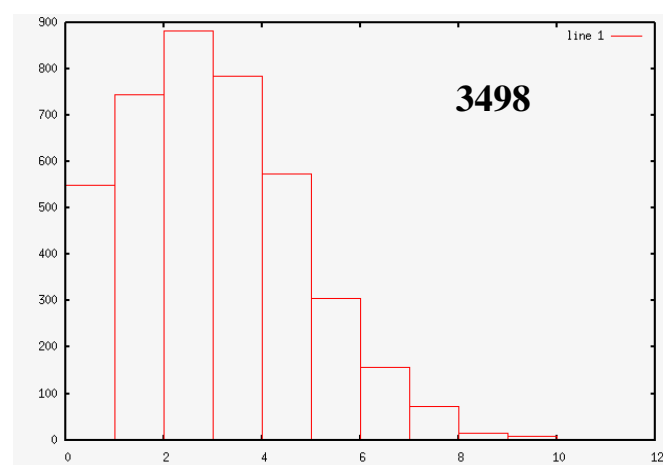
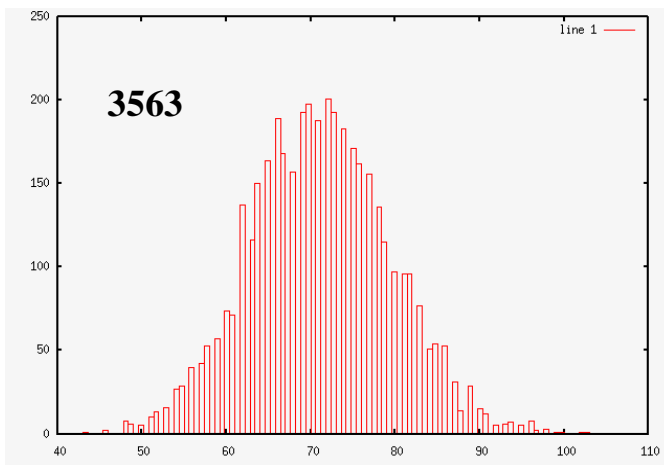
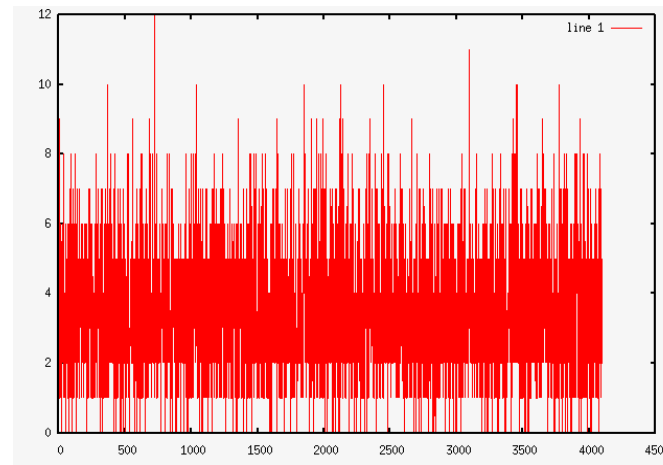


MCS

MCS Dwell time = 20 ms

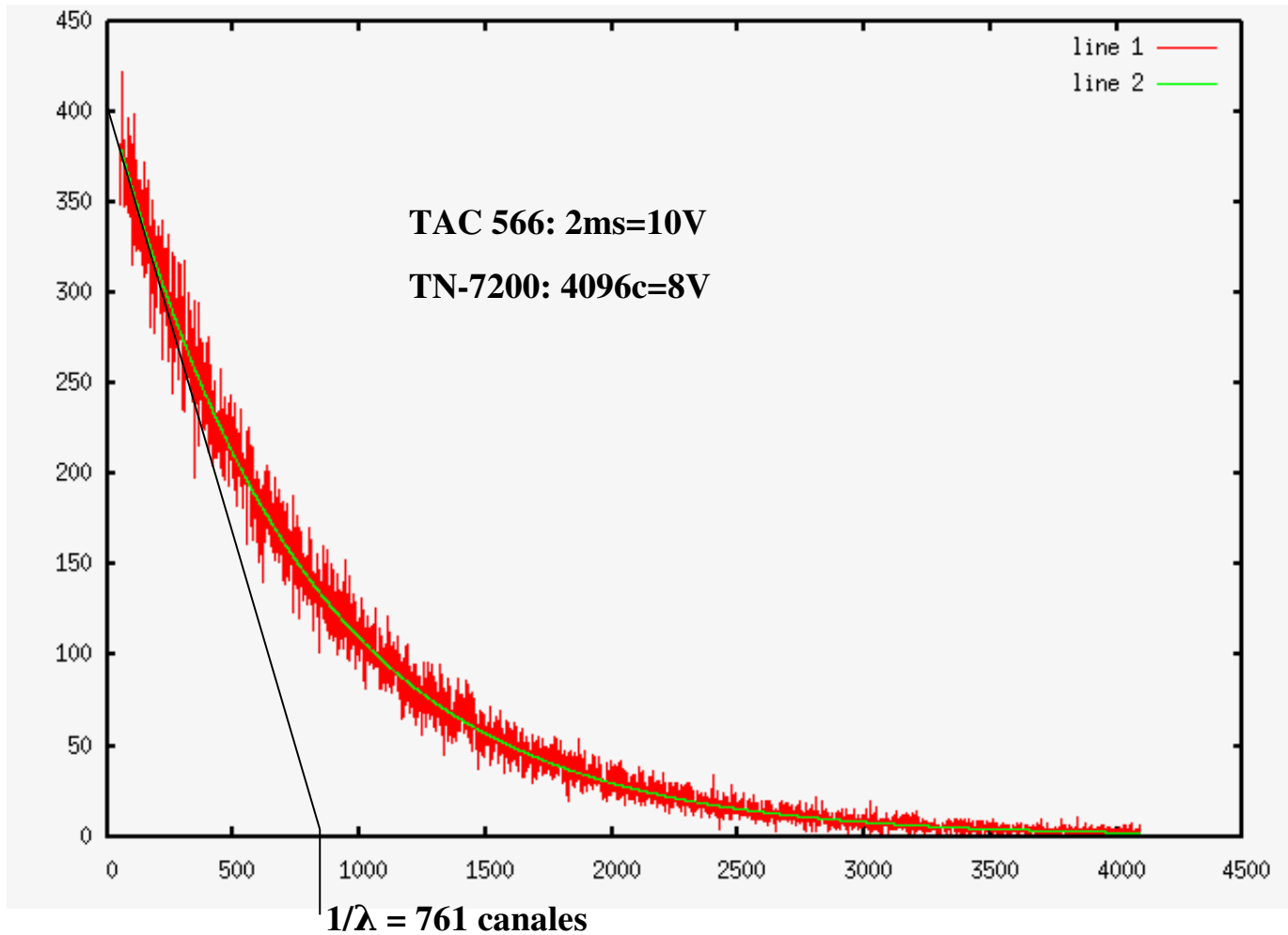


MCS Dwell time = 1 ms



180s -> tasa=3570 c/s

MCA



FIT -> tasa=3362 c/s (5%)

Posibles fuentes de error

- Falta de calibración del eje x del MCA (tiempo)
- Baja estadística (180 s)
- Tasa demasiado alta (3500 c/s)
- Centellador de PS (verde: ^{22}Na , azul: ^{137}Cs)

